

LEONARDO VENTURI MARQUES

nota final  
9.6 (nove e seis)  
LVM

# **Desenvolvimento de um software de navegação para aplicações em sistemas oceânicos**

Trabalho apresentado à Escola  
Politécnica da Universidade de  
São Paulo para obtenção do  
título de bacharel em Engenharia  
Mecatrônica.

São Paulo  
2004

**LEONARDO VENTURI MARQUES**

# **Desenvolvimento de um software de navegação para aplicações em sistemas oceânicos**

Trabalho apresentado à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de bacharel em Engenharia Mecatrônica.

Área de Concentração:  
Engenharia Mecatrônica

Orientador:  
Prof. Dr. Ettore Apolônio de Barros

**São Paulo  
2004**

Dedico este trabalho aos meus pais  
Querino e Judite, que são as pessoas  
que me fortalecem nos momentos  
difíceis. Obrigado por tudo.

## **AGRADECIMENTOS**

A meus familiares, que são a razão da minha vida e aos meus amigos que me ajudaram não só na realização deste trabalho, mas também durante a vida acadêmica na Escola Politécnica.

Ao companheiro e orientador, professor Ettore, que, com seus valiosos ensinamentos e incentivos, fez com que este trabalho se tornasse realidade.

Ao Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo e ao Instituto de Pesquisas da Marinha pelo apoio fornecido.

Ao companheiro Fábio Villas Boas pelo apoio na realização dos ensaios.

A Deus, por me conceder a oportunidade de concluir este trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente colaboraram na execução deste trabalho.

## SUMÁRIO

Resumo

Abstract

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1	Introdução.....	1
1.1	Breve histórico.....	1
1.2	Conceitos Básicos de navegação inercial.....	2
1.3	Sensores Inerciais.....	5
1.3.1	Acelerômetros.....	5
1.3.2	Giroscópios.....	6
1.4	Descrição geral do software de navegação.....	8
1.5	Objetivos.....	10
2	Sistema de Navegação Inercial.....	11
2.1	Conceitos básicos do Sistema Strapdown.....	11
2.2	Transformação do sistema inercial para o sistema de coordenadas da Terra..	12
2.3	Transformação para o sistema de coordenadas de navegação.....	13
2.4	As Equações de Navegação.....	15
2.4.1	Modelagem da forma da Terra.....	17
2.4.2	Variação do campo gravitacional.....	17
2.5	Representação da atitude do veículo.....	18
2.5.1	Cossenos Diretores.....	19
2.5.2	Ângulos de Euler.....	20
2.5.3	Quatêrnions.....	21
3.0	Compensação e Estabilização dos sensores.....	23
3.1	Fator de Escala.....	23
3.2	Erros constantes (bias) e desalinhamento.....	24
3.3	Erros causados pela sensibilidade a acelerações e rotações.....	26

3.4	Determinação dos parâmetros de erros.....	28
3.4.1	Rate-test.....	28
3.4.2	Teste das múltiplas posições.....	28
3.5	Propagação dos erros no tempo.....	33
3.5.1	Pêndulo de Schuler.....	35
4.0	Alinhamento do sistema de navegação inercial.....	42
4.1	Conceitos básicos e equacionamento.....	42
4.2	Implementação computacional de desalinhamentos.....	44
5.0	Validação do software.....	47
6.0	Filtro de Kalman.....	49
6.1	Conceitos básicos.....	49
6.2	Modelagem do Sistema no espaço de estados discreto.....	51
7.0	Ensaio e discussões.....	57
7.1	Ensaio automotivo (DMU/GPS).....	57
7.2	Fusão sensorial bússola/IMU.....	66
8.0	Conclusão.....	71
	APÊNDICE A - Software de Alinhamento.....	73
	APÊNDICE B - Software de Navegação.....	77

## Lista de Referências

## RESUMO

O trabalho se propõe ao desenvolvimento de um software de navegação para aplicações em sistemas oceânicos, utilizando-se, para isso, de uma Unidade de Medidas Dinâmicas (DMU), de forma a obtermos informações sobre velocidades e posições de um veículo a uma alta taxa de amostragem através dos nossos sensores inerciais (giroscópios e acelerômetros). Leva-se em consideração os possíveis erros que esses sensores podem introduzir ao sistema, como os erros decorrentes de sua própria construção (desvios, desbalanceamento de massa, quadratura e assimetria do fator de escala), e também os erros introduzidos pela própria montagem dos mesmos. Discutem-se alguns procedimentos para determinação dos parâmetros de erros mais significativos através dos “testes das rates” e do “teste das multi-posições”, bem como a sua modelagem e controle. Discutimos as vantagens e desvantagens entre os sistemas de plataforma estabilizada e o sistema strapdown. Todo o desenvolvimento matemático das equações de navegação é demonstrado, utilizando-se o sistema strapdown. A análise dos giroscópios da Marinha do Brasil (DTGs) é realizada, levando-se em consideração, não só os erros compensáveis determinados em laboratório, mas também as derivas aleatórias do sensor, que são introduzidas em um simulador, onde analisamos seus efeitos na navegação. É realizado um estudo analítico dos efeitos na navegação da propagação dos erros inseridos no sistema. São discutidas formas de representação da atitude de um veículo, como os quatêrnions e ângulos de Euler, comparando os resultados de saída do software (quatêrnion) com um modelo de manobra de um ROV (Ângulos de Euler). Finalmente, utilizamos um Filtro de Kalman para combinarmos os dados de saída dos sensores inerciais da UMI utilizada nos ensaios com as posições fornecidas pelo GPS ou com os ângulos de yaw fornecidos por uma bússola eletrônica, como forma de minimizarmos as imprecisões dinâmicas inerentes ao sistema e constataremos a versatilidade e a performance deste Filtro na Navegação Inercial.

## ABSTRACT

This work intends to the development of a navigation software for applications in oceanic systems, using, for that, a Dynamic Measures Unit (DMU), in a way that we can obtain information about speeds and positions of a vehicle in a high sampling tax through our inertial sensor (gyroscopes and accelerometers). It is taken into account the possible mistakes that those sensor could introduce to the system, like the mistakes due to its own construction (deviations and asymmetry of the scale factor, for example), and also the mistakes introduced by the own assembly of them. Some procedures are discussed for determination of the parameters of the most significant mistakes through the "rate test" and the "multi-positions test", as well as its modelling. We discuss the advantages and disadvantages between the Stabilized Platform Systems and the Strapdown System. The whole mathematical development of the navigation equations is demonstrated, taking into account the Strapdown System. The analysis of the gyroscopes of the Brazilian Navy (DTG) is accomplished, taking into account, not only the mistakes compensated in laboratory, but also the random drifts of this sensor, that are introduced in a simulator, where we analyze their effects in the navigation. An analytical study of the effects in the navigation of the propagation of the mistakes inserted in the system is accomplished. Forms of representation of the attitude of a vehicle are discussed, like the quaternion and Euler angles, comparing the results of the exit of the software -quaternion- with a model of maneuver of a ROV (Remotely Operated Vehicle)-Angles of Euler. Finally, we use a Kalman Filter to combine the data of the inertial sensor with the positions supplied by the GPS (Global Positioning System) or with the yaw angles supplied by an electronic compass, as form that we can minimize the inherent dynamic imprecision of the system and we can verify the versatility and the performance of this Filter in the Inertial Navigation.



## LISTA DE FIGURAS

- Figura 1.1 Sistema de Coordenadas de Navegação
- Figura 1.2 Sistema de Coordenadas do Corpo
- Figura 1.3 Sistema Básico *Strapdown*
- Figura 1.4 Pêndulo simples
- Figura 1.5 Acelerômetro
- Figura 1.6 Propriedade dos giroscópios
- Figura 1.7 Giroscópio
- Figura 1.8 Diagrama de blocos do software
- Figura 2.1 Sistema Strapdown 3D
- Figura 2.2 Vetor de posição do ponto P
- Figura 2.3 Sistema Strapdown- coordenadas de navegação
- Figura 2.4 Quatêrnions
- Figura 3.1 Desalinhamento
- Figura 3.2 “bias” nos giroscópios
- Figura 3.3 Compensação de erros em giroscópios
- Figura 3.4 Compensação de erros em acelerômetros
- Figura 3.5 Simulação de erros nos giroscópios
- Figura 3.6 Corrente Elétrica
- Figura 3.7 Velocidade angular
- Figura 3.8 Diagrama de blocos dos erros em um sistema strapdown
- Figura 3.9 Oscilação de Schuler no canal horizontal
- Figura 3.10 Trajetórias de um ROV com e sem deriva nos giros
- Figura 3.11 Desvio causado pela deriva na trajetória do ROV
- Figura 3.12 Trajetória da embarcação com e sem os erros de deriva
- Figura 3.13 Propagação do desvio entre as trajetórias
- Figura 4.1 Alinhamento do vetor gravidade no plano
- Figura 4.2 Alinhamento em azimuth
- Figura 5.1 Resposta a um *degrau* nos propulsores do ROV (Euler)

- Figura 5.2 Deslocamentos do ROV nas direções x e y (Quatêrnion)
- Figura 5.3 Velocidades do ROV nas direções x e y (Quatêrnion)
- Figura 6.1 Diagrama Esquemático do Filtro de Kalman
- Figura 6.2 Simulação de trajetória realizada dentro de um duto petrolífero
- Figura 6.3 Deriva aleatória dos giroscópios
- Figura 6.4 Trajetória com deriva aleatória nos giroscópios
- Figura 6.5 Propagação do desvio no tempo
- Figura 6.6 Trajetória do pig com o Filtro de Kalman
- Figura 6.7 Propagação do desvio no tempo
- Figura 7.1 Unidade de Medida Dinâmica (DMU)
- Figura 7.2 Ensaio realizado na USP
- Figura 7.3 Trajetória do veículo no 1º ensaio
- Figura 7.4 Velocidades do veículo no 1º ensaio
- Figura 7.5 Degeneração da DMU
- Figura 7.6 Trajetória com o Filtro de Kalman
- Figura 7.7 Desvio do Filtro de Kalman
- Figura 7.8 Trajetória do veículo no 2º ensaio
- Figura 7.9 Velocidades do veículo no 2º ensaio
- Figura 7.10 Degeneração da DMU
- Figura 7.11 Trajetória com o Filtro de Kalman
- Figura 7.12 Desvio do Filtro de Kalman
- Figura 7.13 Arranjo do ensaio com a bússola
- Figura 7.14 Comparação entre as trajetórias
- Figura 7.15 Comparação entre as trajetórias bússola/DMU
- Figura 7.16 Desvio sem fusão sensorial
- Figura 7.17 Desvio com fusão sensorial

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela I - Parâmetros de erros.....	31
Tabela II - Propagação dos erros em um sistema strapdown.....	35
Tabela III - Propagação dos erros com compensação de Schuler.....	38
Tabela IV - Modos de Aquisição de medidas da DMU.....	59

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Breve histórico

Desde os tempos mais remotos, os homens se deslocam através de longas distâncias, tendo por desafio a aquisição de conhecimentos sobre como se orientar e se posicionar corretamente. Esta habilidade demandava alguma forma de navegação. Nossos ancestrais já viajavam longas distâncias à procura de comida e abrigo seguro, atravessando grandes rios através de uma navegação puramente visual.

Após um período de desenvolvimento, os oceanos começaram a ser “vencidos” pelos navegadores através de técnicas de orientação e posicionamento que utilizavam agulhas magnéticas e observações dos astros e estrelas através de sextantes, o que, obviamente, era uma prática perigosamente dependente das condições climáticas.

No século XVIII, Isaac Newton definiu as leis da mecânica e gravitação, cujos fundamentos eram essenciais para o desenvolvimento dos princípios da **navegação inercial**. Apesar disso, foram necessários mais dois séculos para que se iniciasse o desenvolvimento real dos sensores inerciais, imprescindíveis para esta técnica, que faz uso dos **sensores girométricos** para medir posições ou velocidades angulares e os **acelerômetros** para medir acelerações lineares.

A navegação inercial ainda desempenha importante papel nos sistemas de controle de navegação dos dias atuais, mesmo com a difusão dos sistemas baseados em satélites, como o GPS (Global Positioning System). Enquanto o GPS tem grande exatidão a qualquer tempo com baixa taxa de amostragem, as plataformas inerciais podem ter altas taxas de amostragem e com seus erros cumulativos cancelados através do GPS. Além disso, por se tratar de uma navegação autônoma e segura, é muito utilizada em aplicações militares, bem como no campo da robótica, suspensão ativa em carros de corrida e inspeção de poços subterrâneos e oleodutos.

## 1.2 Conceitos básicos de navegação inercial

Antes de tudo, é necessário que nos orientemos no espaço em que iremos navegar. Para isso, faremos uso dos diversos sistemas de coordenadas e suas relações de transformação. Os sistemas de coordenadas utilizados serão:

- sistema de coordenadas inercial: tendo com origem o centro da Terra, não girando com a mesma ;
- sistema de coordenadas da Terra: tendo com origem o centro do planeta, porém girando junto com o mesmo;
- sistema de coordenadas de navegação: é o sistema local, que tem como origem a localização do sistema de navegação e os seus eixos são alinhados com o Norte, Leste e a vertical (down) local;

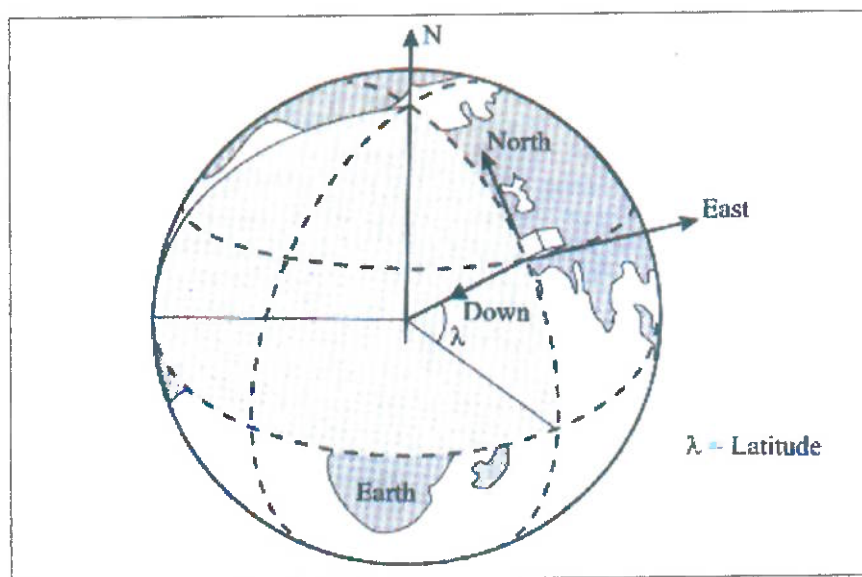


Figura 1.1 Sistema de Coordenadas de Navegação

- sistema de coordenadas do corpo: correspondem aos eixos de roll, pitch e yaw do veículo em que o sistema de navegação está instalado.

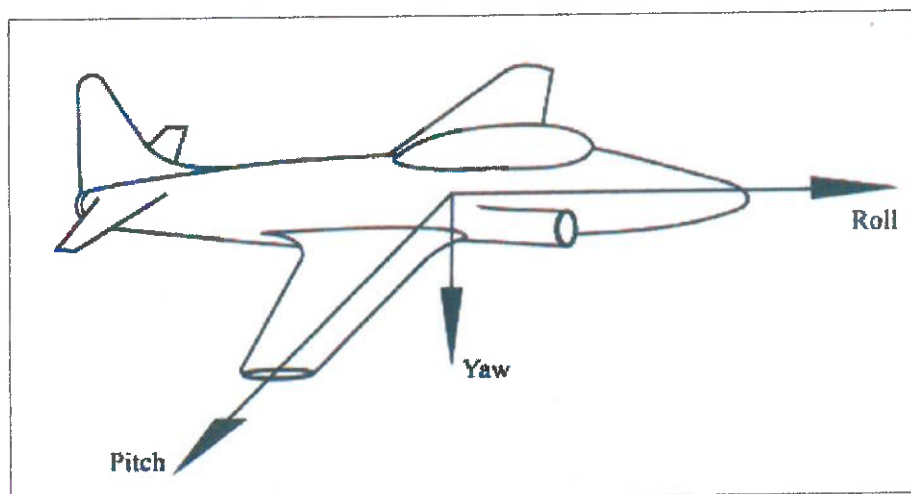


Figura 1.2 Sistema de Coordenadas do Corpo

Com base nas informações dos sensores girométricos e acelerômetros e na posição inicial de um veículo, é possível, através de uma integração ao longo do tempo, conhecermos as posições futuras do veículo. Naturalmente, os erros dos sensores também serão integrados e, conforme o período se alonga, maior será o erro da posição calculada. Por isso, o grau de demanda pela qualidade dos sensores depende muito da jornada que se deve cumprir. Desde uma jornada de alguns segundos, como a de alguns projeteis, até o sistema inercial de navegação de submarinos nucleares, onde as trajetórias são muito mais longas.

O sistema de navegação inercial (INS) é constituído por um computador de navegação e um conjunto de giroscópios e acelerômetros já mencionados. Este conjunto de sensores inerciais é conhecido como *unidade de medida inercial* (UMI). Uma vez alinhados a um sistema referencial de coordenadas, estes sensores fornecem medidas das distâncias percorridas e que serão continuamente processadas e armazenadas pelo computador de navegação.

Os sensores inerciais podem ser montados em uma estrutura denominada *plataforma de navegação*, onde suas orientações são mantidas fixas independente do movimento do veículo ou, de outra maneira, podem ser afixados à estrutura do veículo, fornecendo medidas no sistema de eixos do

veículo, havendo a necessidade de se fazer a transformação de coordenadas para o de navegação, conforme será demonstrado no esquema da **figura 1.3**. Este último sistema é denominado *strapdown* e será estudado com maior profundidade posteriormente.

Os *sistemas de plataformas de navegação* apresentam como vantagens em relação ao *strapdown* a demanda por giros mais simples, devido às baixas “*rates*”, maior exatidão e fácil calibração dos sensores, através da rotação da própria plataforma. E como desvantagens o custo, devido a sua complexidade e a baixa confiabilidade, devido ao comprometimento com o alinhamento e desempenho oferecidos pelos mancais e anéis deslizantes do mecanismo.

Por outro lado, o *strapdown* apresenta como vantagens a robustez, uma alta confiabilidade e baixo custo, devido à estrutura simples. E como desvantagens o difícil alinhamento, em virtude de não poder ser movimentado facilmente e difícil calibração dos sensores. Contudo, tudo o que diz respeito ao *strapdown* será visto com maiores detalhes no tópico referente ao mesmo, sendo demonstrada apenas uma esquematização do seu funcionamento a seguir:

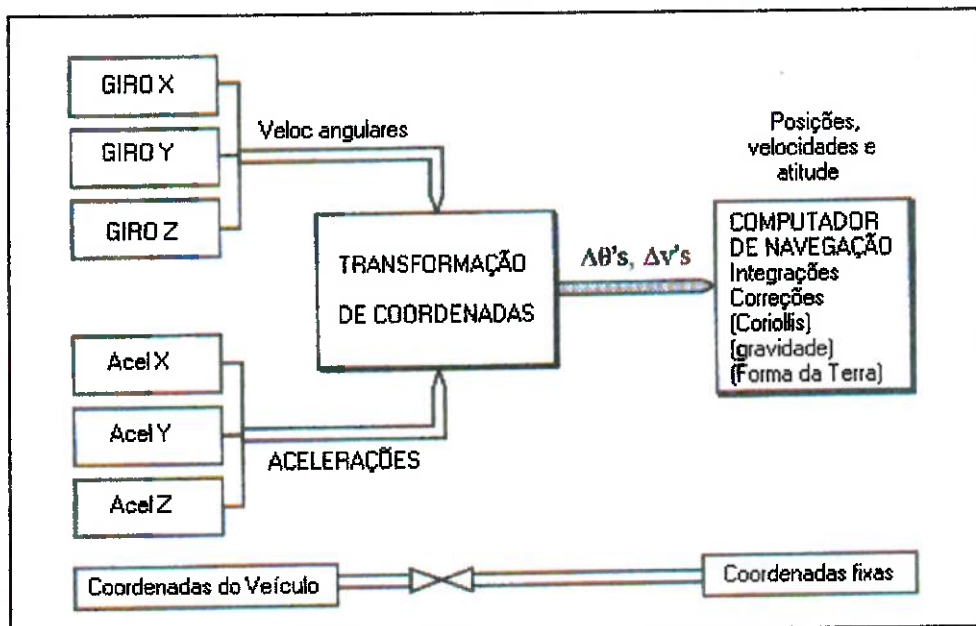


Figura 1.3 Sistema Básico *Strapdown*

### 1.3 Sensores inerciais

#### 1.3.1 Acelerômetros

Alguns acelerômetros são construídos sobre o mesmo princípio do pêndulo, ou seja, há uma massa de prova que pode se mover como um pêndulo em torno de um eixo (eixo de saída) perpendicular à direção da aceleração imposta (eixo de entrada). Esses acelerômetros não medem a aceleração do corpo, mas sim a diferença entre esta aceleração e a gravidade, conforme a figura seguinte:

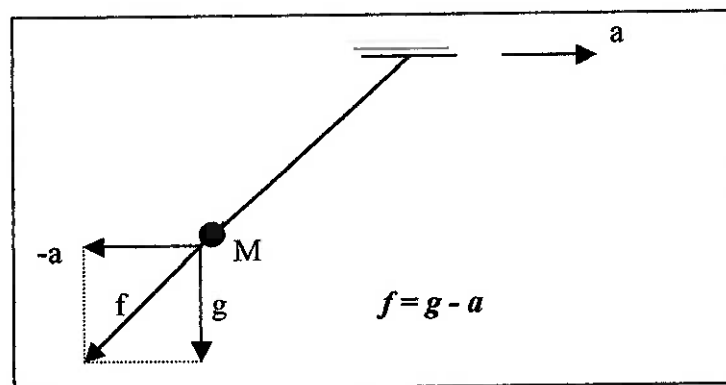


Figura 1.4 Pêndulo simples

Com um gerador de sinais apropriado, podemos obter a medida de uma força específica (aceleração) imposta na direção do eixo de entrada, que será proporcional à deflexão da massa de prova em torno do eixo de saída. Essa deflexão será detectada pelo gerador de sinais conforme vemos na figura seguinte. A seguir, o gerador de sinais envia um sinal ao gerador de torques, de maneira que este último forneça um torque necessário para que a posição do pêndulo volte ao normal. O torque enviado pelo gerador de torques para corrigir a posição do pêndulo será proporcional ao deslocamento do mesmo, que, por sua vez, será proporcional à aceleração imposta ao conjunto. Desta forma, através do sinal enviado pelo gerador de sinais, podemos calcular a aceleração



imposta ao veículo em que o acelerômetro está instalado, descontada da aceleração da gravidade por se tratar de um acelerômetro pendular, conforme já demonstramos na figura anterior (Figura 1.4).

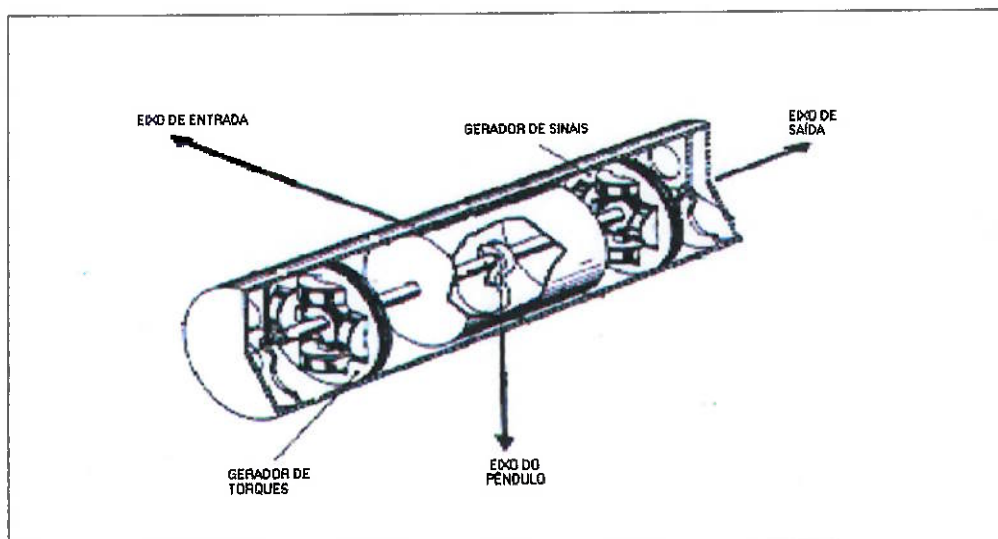


Figura 1.5 Acelerômetro

### 1.3.2 Giroscópios

Um giroscópio pode ser considerado um disco girando a uma alta velocidade angular em torno de seu eixo de simetria. Caso um torque ( $M$ ) seja aplicado normalmente ao vetor momento angular ( $H$ ), então o giroscópio irá girar com uma velocidade angular ( $\omega$ ) perpendicular ao torque “ $M$ ” aplicado e ao momento angular “ $H$ ” do disco. De outra forma, caso uma velocidade angular ( $\omega$ ) seja imposta ao giroscópio, um torque ( $M$ ) irá aparecer perpendicularmente à velocidade angular e ao momento angular ( $H$ ), e sua magnitude será  $M = \omega \times H$ , conforme vemos na figura seguinte:

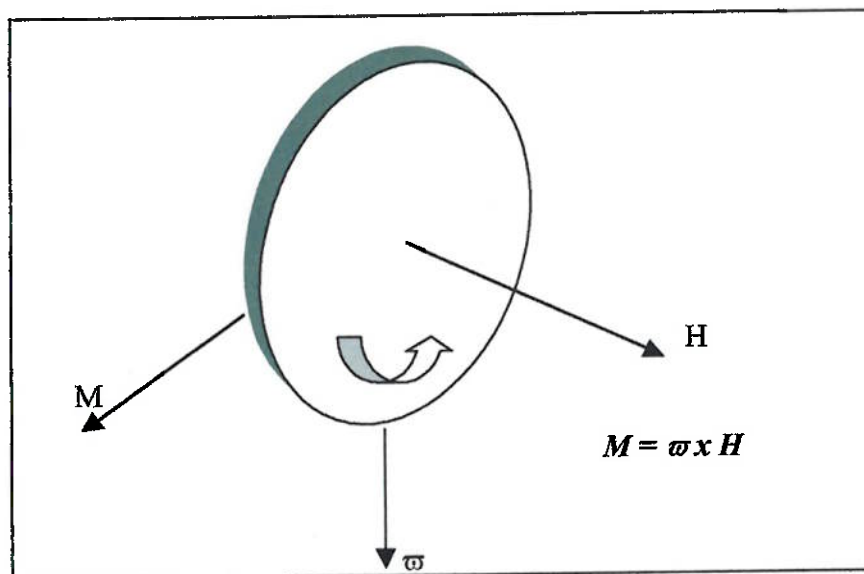


Figura 1.6 Propriedade dos giroscópios

O funcionamento dos giroscópios se baseia nesta propriedade, de forma que, na presença de um gerador de sinais, o torque ( $M$ ) possa ser detectado e mensurado, de forma a obtermos a magnitude do movimento de precessão ( $\omega = M/H$ ), que servirá para a manutenção da orientação e, ao mesmo tempo, para gerarmos um torque invertido em torno do eixo de saída do giroscópio para o posicionamento correto do mesmo, que servirá de referência para os acelerômetros, que só medem acelerações lineares. Na figura seguinte, vemos uma ilustração de um giroscópio com um grau de liberdade, e a demonstração dos seus eixos entrada e o próprio eixo de rotação do giroscópio, que tem a mesma orientação do vetor "H". Da mesma forma que aconteceu nos acelerômetros, o gerador de sinais irá detectar um possível movimento do giroscópio em torno do eixo de saída e, em seguida, enviará um sinal proporcional a este movimento ao gerador de torques, de maneira a corrigir o posicionamento do disco girante. O sinal enviado pelo gerador de sinais será proporcional à velocidade angular do conjunto.

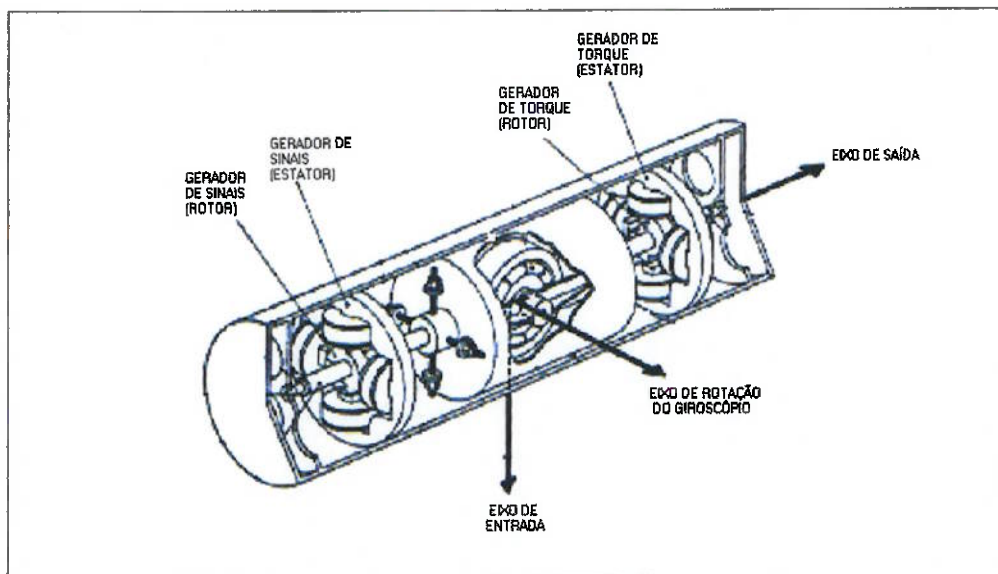


Figura 1.7 Giroscópio

#### 1.4 Descrição geral do software de navegação

Para fazermos uma descrição geral do software, iremos descrever, a seguir, os passos segundo os quais a navegação inercial é realizada:

1. Primeiramente, procederemos à compensação dos sensores, encontrando os parâmetros de erros de cada um deles, bem como ao alinhamento dos seus eixos com os eixos do corpo do veículo em que o sistema está instalado;
2. Após isso, temos que informar ao sistema as condições iniciais do veículo, ou seja, posição, velocidade e atitude;
3. As rates fornecidas pelos giroscópios são utilizadas para a propagação dos parâmetros do quatêrion, de modo a manter atualizada a atitude do veículo;
4. Com a matriz de transformação de coordenadas atualizada, obtemos as acelerações dos acelerômetros em relação ao Sistema de Coordenadas do Veículo e transformamos para o Sistema de Coordenadas de Navegação;

5. Essas acelerações combinadas às condições iniciais do veículo serão processadas pelo computador de navegação (equações de navegação), de modo a calcular a velocidade e a posição futura do veículo;

6. As velocidades e posições encontradas provêm um feed-back para atualização da matriz de atitude, compensação dos efeitos da aceleração de Coriolis, da forma do planeta e da gravidade, conforme vemos na Fig. (1.8):

Todos esses passos estão representados no seguinte diagrama de blocos, que servirá para representar o nosso software de navegação desenvolvido no ambiente **MATLAB**:

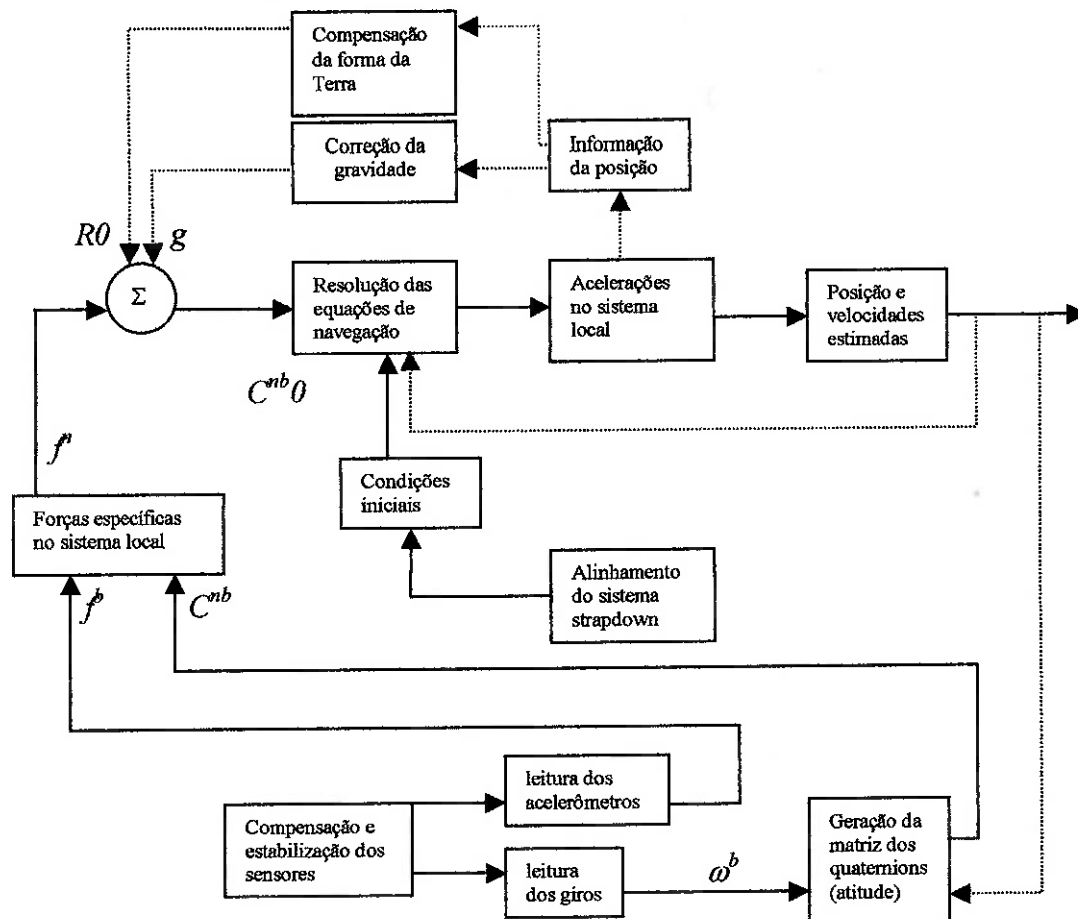


Figura 1.8 Diagrama de blocos do software

## 1.5 Objetivos

Pretende-se, com este trabalho, dar uma visão geral do funcionamento de um sistema strapdown e seu equacionamento, dos sensores inerciais e das fontes de erros que podem ser introduzidas ao sistema inercial de navegação. Iremos proceder à representação da atitude do veículo através dos parâmetros do quatêrnion. Dessa forma, o software será validado através da comparação entre a trajetória de um ROV observada a partir de um simulador no MATLAB (ângulos de Euler) e a trajetória fornecida pelo software (quatêrnions), tendo como entrada as mesmas acelerações medidas no simulador.

Através dos parâmetros de erros dos sensores da Marinha do Brasil determinados em laboratório, iremos realizar uma análise numérica desses efeitos na navegação, através de simuladores (ROV, embarcação classe Mariner e do pig inercial). Além disso, será efetuado um estudo analítico da propagação no tempo das principais fontes de erro a que o sistema de navegação inercial está sujeito, e esse estudo servirá como base para o levantamento das especificações necessárias aos sensores para atingir certos graus de precisão na navegação.

Iremos desenvolver um algoritmo de fusão sensorial, através da linearização e discretização do modelo de estados do sistema e de certas medidas de referência tomadas a partir do GPS e de uma bússola eletrônica. Através do filtro de Kalman, iremos comparar e analisar, posteriormente, as trajetórias obtidas nos ensaios realizados, verificando a sua eficiência na Navegação Inercial.

## 2 SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

### 2.1 Conceitos básicos do Sistema Strapdown

Surgindo como uma alternativa barata e com alto grau de confiabilidade, o sistema *strapdown* é o sistema de navegação inercial mais utilizado em veículos oceânicos, podendo ser configurado para navegação em duas ou três dimensões, dependendo do tipo de aplicação.

Quando tratamos de um espaço em três dimensões, os cálculos são bastante complexos e entraremos a fundo no seu desenvolvimento posteriormente. Neste caso, o sistema comportará três acelerômetros e três giros conforme o desenho seguinte:

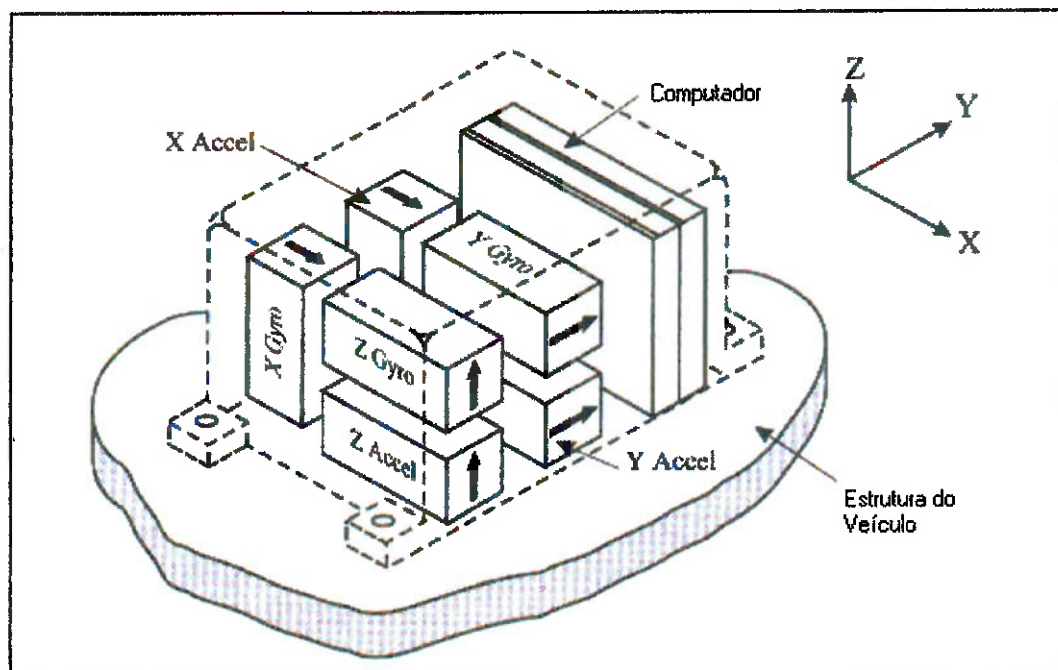


Figura 2.1 Sistema Strapdown 3D

## 2.2 Transformação do sistema inercial para o sistema de coordenadas da Terra

Como os dados de saída dos acelerômetros são fornecidos em relação ao *sistema de coordenadas do corpo*, é necessário que façamos a transformação para um sistema conveniente de navegação, conforme os dados fornecidos pelos giroscópios. Além disso, efeitos da gravidade e acelerações decorrentes da rotação do planeta devem ser computados, conforme veremos no equacionamento seguinte:

Considere a figura seguinte, onde o vetor  $r$  representa a posição do ponto P em relação à origem O:

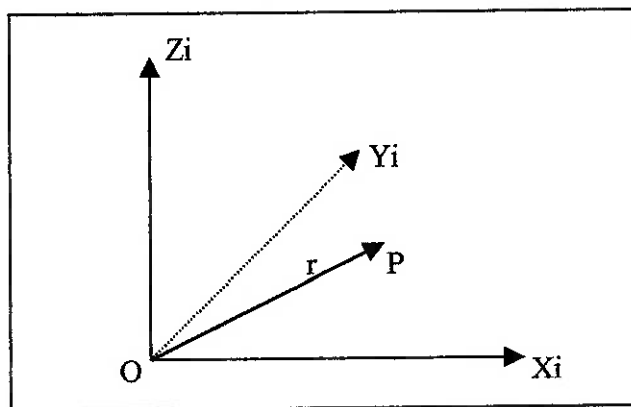


Figura 2.2 Vetor de posição do ponto P

A aceleração do ponto P em relação ao sistema de eixos fixos é definida por:

$$a_i = \frac{d^2}{dt^2} r_i \quad (2.1)$$

A triade de acelerômetros perfeitos nos fornecerá a medida da força específica ( $f$ ) atuando no ponto P, onde:

$$f = \frac{d^2}{dt^2} r_i - g \quad (2.2)$$

pois trata-se de um acelerômetro pendular, conforme descrito em 1.3.1, onde o índice "i" representa o vetor  $r$  descrito no sistema de eixos inerciais fixos.

Logo, teremos:

$$\frac{d^2}{dt^2} r|_i = f + g \quad (2.3)$$

Em relação ao sistema de coordenadas girantes, utilizamos a equação de Coriolis:

$$\frac{d}{dt} r|_i = \frac{d}{dt} r|_e + [\omega_{ie} \times r] \quad (2.4)$$

onde o índice “e” se refere ao sistema girante (Earth axis) e  $\omega_{ie}$  representa a velocidade angular do eixo girante em relação ao fixo.

Como  $\frac{d}{dt} r|_e = v_e$ , temos:

$$\frac{d^2}{dt^2} r|_i = \frac{d}{dt} v_e|_i + \frac{d}{dt} [\omega_{ie} \times r]|_i \quad (2.5)$$

Aplicando a equação de Coriolis ao segundo termo da equação:

$$\frac{d^2}{dt^2} r|_i = \frac{d}{dt} v_e|_i + [\omega_{ie} \times v_e] + [\omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]] \quad (2.6)$$

considerando  $\omega_{ie}$  constante.

Combinando (2.3) e (2.6), temos:

$$\frac{d}{dt} v_e|_i = f - [\omega_{ie} \times v_e] - [\omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]] + g \quad (2.7)$$

onde:

- **f** : força específica a que o sistema de navegação está submetido
- **$[\omega_{ie} \times v_e]$**  : aceleração de Coriolis
- **$[\omega_{ie} \times [\omega_{ie} \times r]]$**  : aceleração centrípeta

A combinação da aceleração decorrente da atração entre massas (**g**) e a aceleração centrípeta nos fornece o chamado vetor de gravidade local (**gl**).

Logo, a equação (2.7) fica:

$$\frac{d}{dt} v_e|_i = f - \omega_{ie} \times v_e + gl \quad (2.8)$$

### 2.3 Transformação para o sistema de coordenadas de navegação

Para navegação através de longas distâncias sobre a Terra, o *sistema de coordenadas de navegação* é o mais conveniente, descrito em termos das



componentes de velocidade em relação ao Norte e Leste local, bem como latitude, longitude e altitude.

Utilizando “n” como índice para coordenadas de navegação, “e” para coordenadas da Terra, “i” para coordenadas inerciais e “b” para coordenadas do corpo (body), temos como equação de Coriolis:

$$\frac{d}{dt} ve|_n = \frac{d}{dt} ve|i - [\omega_{ie} + \omega_{en}] \times ve \quad (2.9)$$

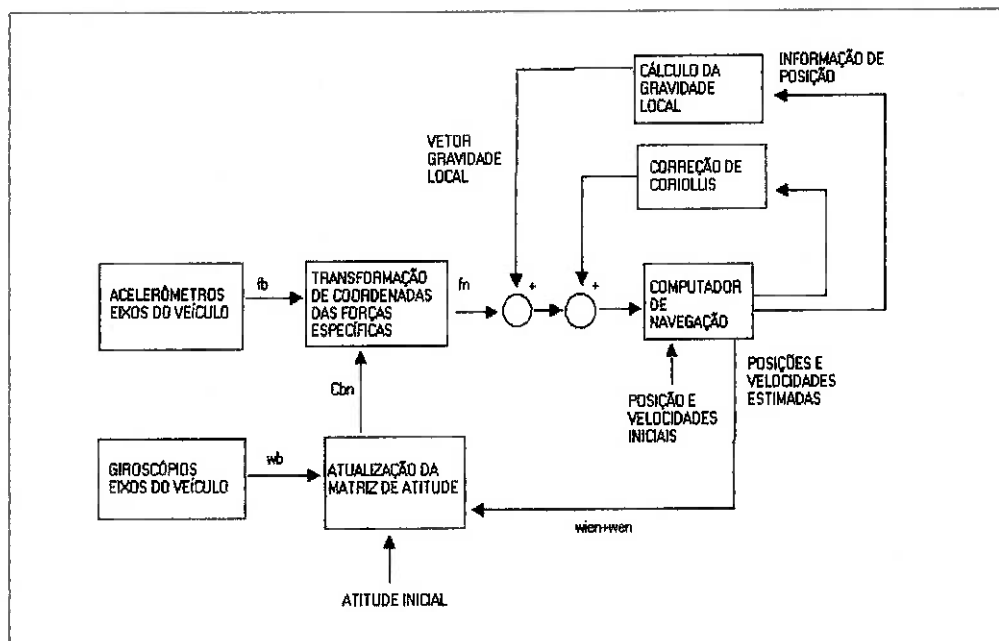
Comparando com a equação (2.8), temos:

$$\frac{d}{dt} ve|_n = f - [2\omega_{ie} + \omega_{en}] \times ve + gl \quad (2.10)$$

Podemos expressá-la em relação às coordenadas de navegação:

$$\frac{d}{dt} ven|_n = Cnb * fb - [(2\omega_{ie} + \omega_{en})|_n \times ve|_n] + gl|_n \quad (2.11)$$

onde “Cnb” é a matriz usada para transformar as forças específicas medidas no sistema do veículo para o sistema de navegação, e que será discutida posteriormente. Logo, o diagrama de blocos correspondente ao equacionamento será:



## 2.4 As equações de navegação

Conforme já foi dito, para a navegação ao longo de grandes distâncias sobre a Terra, o *sistema de coordenadas de navegação* é o mais conveniente e o seu equacionamento já foi deduzido através da seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} \text{ven}|_n = f|_n - [(2\omega_{ie} + \omega_{en})|_n \times \text{ve}|_n] + g|_n$$

“*ven*” representa a velocidade em relação à Terra, expressa em termos do *sistema de navegação*, definido pelo Norte verdadeiro (N), Leste (E) e vertical local (D), com as seguintes componentes:

$$\text{ven} = [vN \ vE \ vD]^t, \begin{cases} \text{N- North} \\ \text{E- East} \\ \text{D- Down} \end{cases}$$

“ $\omega_{ie}|_n$ ” representa a velocidade de rotação da Terra, expressa no *sistema de coordenadas de navegação*:

$$\omega_{ie}|_n = [\Omega \cos L \ 0 \ -\Omega \sin L]^t, \begin{cases} \Omega\text{- Taxa de rotação da Terra} \\ L\text{- Latitude} \end{cases}$$

“ $\omega_{en}|_n$ ” representa a velocidade de rotação do *sistema de navegação* em relação à Terra, expressa no *sistema de coordenadas de navegação*. Essa grandeza pode ser expressa em termos das taxas de mudança da latitude e longitude, como se segue:

$$\omega_{en}|_n = \left[ \frac{d\lambda}{dt} \cos L \quad -\frac{dL}{dt} \quad -\frac{d\lambda}{dt} \sin L \right]^t, \begin{cases} \lambda\text{- Longitude} \end{cases}$$

$$\text{Sendo } \frac{d\lambda}{dt} = vE / (R0+h) \cos L \quad \text{e} \quad \frac{dL}{dt} = vN / (R0+h), \begin{cases} R0\text{- Raio da Terra} \\ h\text{- altura acima da} \\ \text{superfície da Terra} \end{cases}$$

$$\text{logo: } \omega_{en}|_n = [vE / (R0+h) \quad -vN / (R0+h) \quad -vE \tan L / (R0+h)]$$

“ $g|_n$ ” representa o vetor gravidade local, que inclui os efeitos combinados da força de atração das massas e da aceleração centrípeta causada pela rotação da Terra ( $\omega_{ie}|_n \times \omega_{ie}|_n \times R$ ).

$$g|_n = g - \omega|_n \times [\omega|_n \times R] = g - \frac{\Omega^2(R_0+h)}{2} \begin{bmatrix} \sin 2L \\ 0 \\ (1 + \cos 2L) \end{bmatrix}$$

Logo, as equações de navegação podem ser expressas em função das componentes, como se segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} vN &= fN - vE(2\Omega + \frac{d\lambda}{dt})\sin L + vD \frac{dL}{dt} = \\ &= fN - 2\Omega * vE * \sin L + \frac{(vN * vD - vE^2 * \tan L)}{(R_0 + h)} \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} vE &= fE - vN(2\Omega + \frac{d\lambda}{dt})\sin L + vD(2\Omega + \frac{d\lambda}{dt})\cos L = \\ &= fE - 2\Omega(vN * \sin L + vD * \cos L) + \frac{vE}{(R_0 + h)} * (vD + vN * \tan L) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} vD &= fD - vE(2\Omega + \frac{d\lambda}{dt})\cos L - vN \frac{dL}{dt} + g = \\ &= fD - 2\Omega * vE * \cos L - \frac{(vN^2 + vE^2)}{(R_0 + h)} + g \end{aligned} \quad (2.14)$$

Onde  $fN$ ,  $fE$  e  $fD$  são componentes das forças específicas medidas pelos três acelerômetros.

Assumimos que:

$$\begin{cases} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{vE}{(R_0+h)\cos L} \\ \frac{dL}{dt} = \frac{vN}{(R_0+h)} \\ \frac{dh}{dt} = -vD \end{cases} \quad (2.15)$$

O que só seria verdade, caso a Terra fosse perfeitamente esférica. Além disso, foi assumido que não haveria variação do campo gravitacional com a variação de posição do sistema de navegação ou de sua altura em relação à superfície da Terra. Tais considerações serão observadas com mais detalhes agora.

### 2.4.1 Modelagem da forma da Terra

É notório que o modelo esférico da Terra não é suficiente para obtermos uma navegação com um certo grau de acurácia. Conseqüentemente, é mais usual o modelo de um elipsóide como forma de nos aproximarmos melhor da geometria verdadeira do planeta.

Desta forma, modelando a Terra de acordo com o elipsóide, as taxas de mudança da latitude e da longitude podem ser expressas em função do *raio meridiano de curvatura* (RN) e do *raio transversal de curvatura* (RE), conforme segue:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{vE}{(RE+h)\cos L} \\ \frac{dL}{dt} &= \frac{vN}{(RN+h)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

onde:

$$\begin{cases} RN = \frac{R(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2 L)^{3/2}} \\ RE = \frac{R}{(1-e^2\sin^2 L)^{1/2}} \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\text{O raio de curvatura médio será: } R_0 = (RE \cdot RN)^{1/2} \quad (2.18)$$

$$E_{\text{men}} = \left[ \frac{vE}{(RE+h)} - \frac{vN}{(RN+h)} - \frac{vE \tan L}{(RN+h)} \right] \quad (2.19)$$

onde “e” representa a maior excentricidade do elipsóide:  $e=0.0818191908426$

### 2.4.2 Variação do campo gravitacional

Como já foi dito, os acelerômetros fornecem a medida da diferença entre a aceleração inercial e a atração gravitacional local. Contudo, na prática, tanto a magnitude quanto à direção do vetor gravidade local variam com a posição na superfície da Terra e com a altura em relação à mesma. Essas

variações ocorrem devido à *variação da aceleração centrípeta com a latitude e da não-homogeneidade da distribuição de massa do planeta.*

A deflexão do vetor gravidade local da vertical pode expressada através de desvios angulares em torno dos eixos North (N) e East (E) do sistema local de navegação, como se segue:

$$g^l = [\xi g, -\eta g, g]$$

onde  $\xi$  representa a deflexão meridiana e  $\eta$  representa a deflexão perpendicular à meridiana.

Um preciso conhecimento do vetor gravidade tornou-se importante para aplicações de alta acurácia. Vários modelos internacionais de variação da gravidade são encontrados na literatura. *Steiler and Winter* nos fornecem as seguintes expressões para variação da magnitude com a latitude ao nível do mar ( $h=0$ ) e para a taxa de variação da gravidade com a altura acima do nível do mar:

$$\begin{aligned} g(0) &= 9.780318(1 + 5.3024 \times 10^{-3} * (\sin L)^2 - 5.9 \times 10^{-6} * (\sin 2L)^2) \text{ m/s}^2 \\ \frac{d}{dt} g(0) &= -0.0000030877(1 - 1.39 \times 10^{-3} * \sin L)^2 \text{ m/s}^2/\text{m} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para aplicações onde o conhecimento preciso da variação da gravidade não é requerido, podemos usar a seguinte equação:

$$g(h) = \frac{g(0)}{(1+h/R_0)^2} \quad (2.21)$$

## 2.5 Representação da atitude do veículo

É importante lembrar que a mudança da atitude do corpo do veículo, sujeito a uma série de rotações em torno de diferentes eixos, não é função apenas dos ângulos de rotação, mas também função da ordem em que essas rotações ocorrem.

Várias representações matemáticas podem ser usadas para definir a atitude de um corpo em relação a um outro sistema de coordenadas, como por exemplo:

- Cossenos diretores: Trata-se de uma matriz 3x3, cujas colunas representam vetores unitários no sistema do corpo projetados no outro sistema de coordenadas;
- Ângulos de Euler: A transformação de coordenadas é definida por três sucessivas rotações em torno dos três eixos (x,y e z);
- Quaternions: Através desta técnica, a transformação de coordenadas é efetuada através de uma simples rotação em torno de um vetor definido.

### 2.5.1 Cossenos diretores

$$C_{nb} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

onde “C<sub>nb</sub>” é a matriz que representa a atitude do corpo (b) no sistema de navegação (n).

Nesta matriz 3x3, o elemento da “iésima” linha e “jésima” coluna representa o cosseno do ângulo entre o eixo *i* do sistema de navegação e o eixo *j* do sistema de coordenadas do corpo.

Um vetor expresso no sistema de coordenadas do corpo do veículo poderá ser expresso no sistema de navegação da seguinte maneira:

$$r_n = C_{nb} * r_b \quad (2.22)$$

A propagação da matriz dos cossenos diretores com o tempo acontece segundo a seguinte equação:

$$\frac{d}{dt} C_{nb} = C_{nb} * \Omega_{nb} \quad (2.23)$$

$$\text{onde, } \Omega_{nb} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & \omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo as grandezas  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , e  $\omega_z$  as velocidades angulares do sistema de eixos do corpo em relação ao sistema de navegação descritos no sistema do corpo

$(\omega n b^b)$ . No caso da navegação inercial, esses valores serão determinados a partir da seguinte equação:

$$\omega n b^b = \omega i b^b - C n b^*(\omega i e^n + \omega e n^n)$$

Compensando, assim, os efeitos da rotação do planeta e do centro de gravidade do veículo em relação à Terra nos dados fornecidos pelos giroscópios (inerciais).

### 2.5.2 Ângulos de Euler

Neste caso, a transformação de coordenadas acontece segundo as seguintes rotações:

- Rotação de um ângulo  $\psi$  em torno do eixo z;
- Rotação de um ângulo  $\theta$  em torno do novo eixo y;
- Rotação de um ângulo  $\phi$  em torno do novo eixo x.

Essas rotações podem ser expressas matematicamente da seguinte forma:

$$\text{Rotação de um ângulo } \psi \text{ em torno do eixo z: } C1 = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotação de um ângulo } \theta \text{ em torno do eixo y: } C2 = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{Rotação de um ângulo } \phi \text{ em torno do eixo x: } C3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

Logo, a transformação pode ser expressa pelo produto destas três matrizes:

$$C n b = C3 * C2 * C1 \quad (2.24)$$

A propagação dos ângulos de Euler com o tempo ocorre segundo a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \omega x \\ \omega y \\ \omega z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d\phi/dt \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C3 * \begin{bmatrix} 0 \\ d\theta/dt \\ 0 \end{bmatrix} + C3 * C2 * \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d\psi/dt \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

### 2.5.3 Quatêrnions

Nesse método, a transformação de coordenadas é efetuada através de uma simples rotação de um ângulo  $\theta$  em torno de um vetor  $\mu$ , conforme demonstra a figura seguinte:

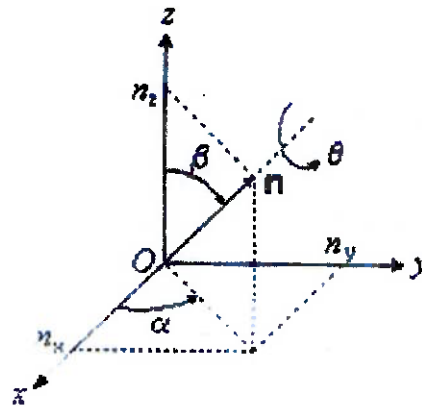


Figura 2.4 Quatêrnions

O quatêrnion, representado pela letra “q”, possui quatro elementos, conforme mostramos:

$$q = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ (\mu_x/\mu)\sin(\theta/2) \\ (\mu_y/\mu)\sin(\theta/2) \\ (\mu_z/\mu)\sin(\theta/2) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

onde,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  e  $\mu_z$  são as componentes do vetor  $\mu$  e  $\mu$  é a magnitude do vetor  $\mu$ .

De outra forma:

$$q = a + ib + jc + kd \quad (2.27)$$

Para fazermos a transformação de coordenadas do corpo para o sistema de navegação, teremos:

$$m = C * rb \quad (2.28)$$

$$\text{onde } C = \begin{bmatrix} (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) & 2(bc - ad) & 2(bd + ac) \\ 2(bc + ad) & (a^2 - b^2 + c^2 - d^2) & 2(cd - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(cd + ab) & (a^2 - b^2 - c^2 + d^2) \end{bmatrix}$$



A propagação do quaternion no tempo ocorre da seguinte forma:

$$dq/dt = \begin{bmatrix} da/dt \\ db/dt \\ dc/dt \\ dd/dt \end{bmatrix}$$

$$\text{onde, } da/dt = -0.5(b*\omega_x + c*\omega_y + d*\omega_z)$$

$$db/dt = 0.5(a*\omega_x - d*\omega_y + c*\omega_z)$$

$$dc/dt = 0.5(d*\omega_x + a*\omega_y - b*\omega_z)$$

$$dd/dt = -0.5(c*\omega_x - b*\omega_y - a*\omega_z) \quad (2.29)$$

Sendo, da mesma forma, as grandezas  $\omega_x$ ,  $\omega_y$ , e  $\omega_z$  as velocidades angulares do sistema de eixos do corpo em relação ao sistema de navegação descritos no sistema do corpo ( $\omega_{nb}^b$ ). No caso da navegação inercial, esses valores serão determinados a partir da seguinte equação:

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_{nb}^n * (\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n)$$

Estas equações serão utilizadas no sistema de navegação *strapdown* para manter os parâmetros do quatêrnion atualizados com a orientação do corpo ao longo do tempo.

### 3.0 COMPENSAÇÃO E ESTABILIZAÇÃO DOS SENSORES

#### 3.1 Fator de Escala

Conforme já comentamos, trata-se da relação entre o sinal de saída e o de entrada, ou seja, é o número que define a tangente do ângulo que a reta, aproximada pelos mínimos quadrados, forma com o eixo das abscissas. A seguir definimos matematicamente:

$$K = S/I \quad (3.1)$$

Onde:  $K$  = fator de escala

$S$  = sinal de saída

$I$  = sinal verdadeiro de entrada

Os sensores possuem, no mínimo, um eixo ao longo do qual (acelerômetros) ou em torno do qual (giroscópios) um sinal de entrada causa um sinal de saída máximo. Esta é a direção em que o fator de escala é definido e este eixo é denominado *input axis* (IA). Para um fator de escala constante, o IA deverá permanecer estável com o tempo, temperatura, vibrações e choques.

O fator de escala pode não ser linear, porém uma relação de segunda ou uma ordem superior deverá ser atribuída ao sinal de entrada. Para isso, é usual que se façam testes com os acelerômetros e giros, variando-se os passos e medindo-se os sinais de saída. Os dados são aproximados a uma reta pelo método dos mínimos quadrados e os resíduos são plotados. Caso estes sejam randômicos ao longo do teste, nenhuma modelagem será possível, contudo, caso formem curvas, ainda que de segunda ou terceira ordem, poderemos obter um modelo bem apropriado para o fator de escala.

O fator de escala em giroscópios é menos importante nos sistemas de plataformas do que nos sistemas *strapdown*, pois os sinais de entrada nos primeiros são próximos a zero sempre, requerendo uma exatidão de no máximo 0.1%, ao passo que, nos segundos, os giroscópios devem medir todas as velocidades angulares do veículo, que pode chegar a 400 graus/s,

desempenhando o fator de escala um papel fundamental na determinação da exatidão do sistema.

Às vezes, os instrumentos podem apresentar valores diferentes para o fator de escala para valores positivos ou negativos dos sinais de entrada, sendo conhecido como *fator de escala assimétrico*, como se segue:

$$K = K_+ \zeta_+ + K_- \zeta_- \quad (3.2)$$

Onde

$K_+$  = fator de escala para  $\Omega > 0$

$K_-$  = fator de escala para  $\Omega < 0$

$\zeta_+ = 1$  e  $\zeta_- = 0$  para  $\Omega > 0$

$\zeta_+ = 0$  e  $\zeta_- = 1$  para  $\Omega < 0$

Onde  $\Omega$  é o sinal de entrada dos sensores.

Essa assimetria será modelada no nosso software.

### 3.2 Erros constantes (bias) e desalinhamento

Geralmente, quando não há sinal de entrada, a saída é zero. Contudo, há alguns desvios causados por imperfeições na fabricação dos sensores, chamados de *bias* ou *zero offset* e representados pela letra “B”, como se segue:

$$S/K = B + I \quad (3.3)$$

Além disso, pode ser que os eixos das coordenadas dos sensores não sejam ortogonais, ou seja, pode ser que os sensores estejam desalinhados entre si. Há uma grande diferença entre esse desalinhamento, que será representado na próxima figura, e o desalinhamento do sistema como um todo, que será tratado posteriormente nas próximas seções. Esses desalinhamentos entre os giroscópios causam erros nas leituras dos acelerômetros, em virtude da referência incorreta

que os giroscópios proporcionam aos outros sensores do bloco, conforme a figura 3.2 irá demonstrar.

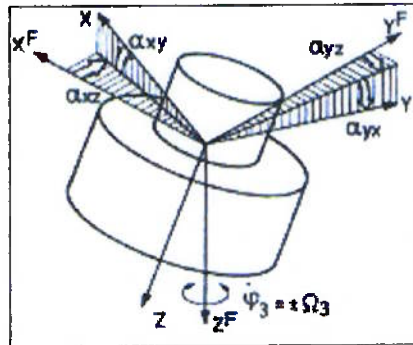


Figura 3.1 Desalinhamento

A figura seguinte ilustra a situação em que um desvio “Bz” em torno *eixo z* causa um desalinhamento e componentes de acelerações nos *eixos x* e *y* dos acelerômetros:

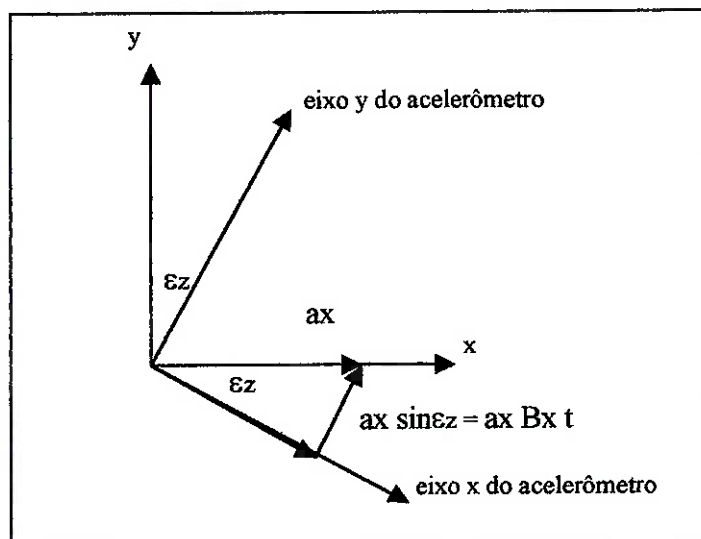


Figura 3.2 “bias” nos giroscópios

### 3.3 Erros causados pela sensibilidade a acelerações e rotações

Os giroscópios medem rotações e acelerômetros medem acelerações. Contudo, indesejavelmente, pode ocorrer de giroscópios responderem a acelerações e acelerômetros responderem a rotações.

Nos giroscópios, esses erros são causados por desbalanceamentos de massa devido a imperfeições de fabricação. Tais desbalanceamentos são lineares com a aceleração, tendo **graus/h/g** como unidade. Sendo pequenos e estáveis, tais erros podem ser compensados no sistema de navegação, pois saberemos as acelerações que estarão atuando ao longo dos eixos.

Os giroscópios mecânicos também podem fornecer como saída uma componente de sinal proporcional ao quadrado da aceleração, chamada de **anisoelasticidade**, causada por uma diferença de rigidez entre os elementos que suportam o elemento sensível do giroscópio com massa **m**. Na presença de uma aceleração (**a**) numa direção inclinada ( $\alpha$ ) ao eixo de rotação, haverá um desalinhamento com o centro de massa do rotor, gerando um torque (**T**) indesejado, conforme se segue:

$$T = \frac{1}{2} m^2 a^2 [1/kx - 1/ky] \sin 2\alpha \quad (3.4)$$

Onde **kx** e **ky** representam a rigidez nos eixos **x** e **y**, respectivamente.

Considerando  $\alpha=45^\circ$  (caso em que o torque será máximo) e a aceleração "**a**" como sendo uma vibração em uma frequência bem abaixo da frequência natural do sistema ( $a=a_0 \sin \omega t$ ), teremos:

$$T(\omega) = \frac{1}{2} m^2 (a_0^2 \sin^2 \omega t) [1/kx - 1/ky] \quad (3.5)$$

Que possui um valor médio de:

$$T(\omega)_{méd} = \frac{1}{4} m^2 a_0^2 [1/kx - 1/ky] \quad (3.6)$$

Como os acelerômetros são construídos por partes finitas de massa, forças de inércia atuam sobre eles quando sujeito a acelerações. Essas forças podem originar um torque indistinguível de um sinal de aceleração ou rotação. Quando sujeitos a acelerações angulares, os acelerômetros pendulares apresentam erros nos sinais de saída. Definindo **pendularidade (p)** como o

produto entre a massa de prova (**m**) e a distância entre o seu centro de massa e o centro de rotação (**k**), temos:

$$p = mk \quad (3.7)$$

podemos expressar o erro da aceleração angular, **ea**, como:

$$\begin{aligned} ea &= (I_0/p)(d\Omega/dt) = \\ &= (I_0/mk)(d\Omega/dt) = (mk^2/mk)(d\Omega/dt) = k(d\Omega/dt) \quad (3.8) \end{aligned}$$

onde:  $I_0$  = momento de inércia em torno do eixo de saída =  $mk^2$

$\Omega$  = velocidade angular em torno do eixo de saída

Analisando a equação 3.5, notamos que quanto menor o tamanho do pêndulo do acelerômetro, melhor será. Obviamente, um acelerômetro não pendular não apresentará sensibilidade a acelerações rotacionais, pois a massa irá transladar ao invés de girar.

Um outro erro, causado por movimentos de rotações chamado de **anisoinércia**, é causado pela diferença entre os momentos de inércia em torno de diferentes eixos (*x* e *y*) dos elementos dos sensores. As acelerações centrífugas " $m r_x \Omega^2$ " e " $m r_y \Omega^2$ " serão diferentes e darão origem a um torque (**T**), conforme a equação seguinte:

$$T = \frac{1}{2} (I_x - I_y) \Omega^2 \sin 2\theta \quad (3.9)$$

Onde:  $I_x$  e  $I_y$  = momentos de inércia em torno dos eixos *x* e *y*

$\Omega$  = taxa de rotação

$\theta$  = ângulo que a rotação forma com o eixo *x*

A equação 3.9 pode ser expressa em termos das componentes *x* e *y* da rotação:

$$T = (I_x - I_y) \Omega_x \Omega_y \quad (3.10)$$

Outro erro muito comum nos giroscópios é o **erro de quadratura**, que é causado por um desalinhamento axial entre o centro de massa do rotor e o centro de rotação da junta, causando um torque indesejável. O parâmetro do erro de quadratura será calculado através do teste das múltiplas posições, como será demonstrado a seguir.

### 3.4 Determinação dos parâmetros de erros

#### 3.4.1 Rate-test

O “rate-test” é um teste realizado com os sensores inerciais, que serve para determinar os parâmetros dos fatores de escala ( $1+DSF$ ) e os parâmetros de desalinhamento ( $\alpha$ ) provocado pelos erros de montagem dos sensores. Os passos da realização do teste são descritos a seguir:

- O bloco de sensores é ajustado em três posições diferentes, de forma que cada eixo principal da central esteja alinhado com o Norte local;
- O bloco é submetido a duas rotações de  $360^\circ$  nos sentidos horário e anti-horário com a mesma velocidade;
- Faz-se a integração dos sinais de torque medidos;
- Cômputo das diferenças dos sinais para os dois sentidos de rotação ( $\Delta J$ ), e utilização dessas diferenças para o cálculo dos parâmetros de fator de escala e desalinhamento, conforme as equações seguintes.

$$\left. \begin{array}{l} (1+DSF_y) = \Delta J_{x,2}/4\pi \\ (1+DSF_x) = \Delta J_{y,3}/4\pi \end{array} \right\} \text{Fatores de escala}$$
$$\left. \begin{array}{l} \alpha_{yx} = \Delta J_{x,1}/\Delta J_{x,2} \\ -\alpha_{yz} = \Delta J_{x,3}/\Delta J_{x,2} \\ \alpha_{xz} = \Delta J_{y,2}/\Delta J_{y,3} \\ -\alpha_{xy} = \Delta J_{y,1}/\Delta J_{y,3} \end{array} \right\} \text{Erros de desalinhamento}$$

#### 3.4.2 Teste das múltiplas posições

Este teste encontra os parâmetros do desbalanceamento de massa ( $m$ ), do erro de quadratura ( $q$ ), os parâmetros da anisoeelasticidade ( $n$ ), bem como os desvios ( $b$ ) dos sensores através dos seguintes passos:

- Orienta-se o conjunto de sensores em posições pré-determinadas, em que a aceleração da gravidade e a taxa de rotação da Terra são bem conhecidas.;
- Mede-se as saídas dos sensores;
- Faz-se a estimativa dos parâmetros de erro através da seguinte regressão linear.

Ex:

$$\underbrace{\frac{1}{1+DSF_y} \begin{bmatrix} M_z/H(1) \\ \vdots \\ M_z/H(8) \end{bmatrix}}_{\text{Rate-test}} \cdot \underbrace{-W_e}_{\text{sinais de torque medidos}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{determinado no teste(veloc angulares)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{bmatrix}}_{\text{Rate-test}} = g \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & g/2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -g/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{determinado no teste(acelerações)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} m \\ q \\ n \\ b_y \end{bmatrix}}_{\text{parâmetros desconhecidos}}$$

Com as velocidades angulares e acelerações determinadas nas oito posições utilizadas no teste, podemos obter os parâmetros dos erros através da equação citada anteriormente.

Logo, podemos obter o seguinte modelo de compensação dos erros nos giroscópios:

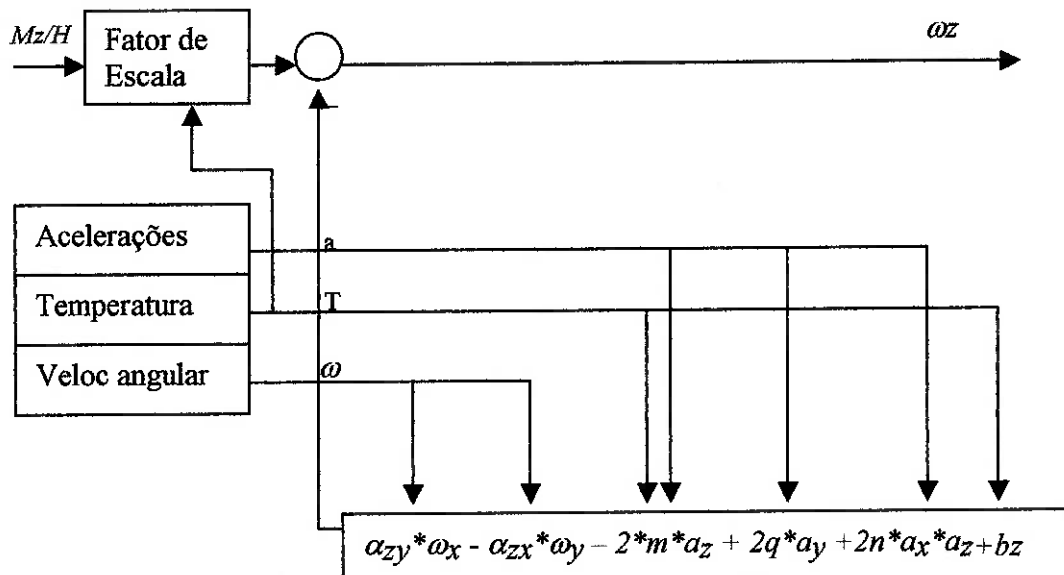


Figura 3.3 Compensação de erros em giroscópios



Além disso, podemos agir da mesma forma com os acelerômetros, ao realizarmos o teste das múltiplas posições, onde obteremos os parâmetros dos erros de desalinhamento ( $\epsilon$ ), fator de escala ( $DK_x$ ), "bias" ( $B_x$ ) e o coeficiente do erro quadrático ( $KQ_x$ ), através da seguinte iteração:

Ex:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_x/SF_x(1) \\ \vdots \\ U_x/SF_x(6) \end{bmatrix}}_{\text{sinais de aceleração}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \\ -g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{determinados no teste de posição(s)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & g & 0 & 1 \\ g & 0 & 0 & g^2 & 1 \\ 0 & 0 & -g & 0 & 1 \\ -g & 0 & 0 & g^2 & 1 \\ 0 & -g & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{determinados no teste de posição(s)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} DK_x \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \\ KQ_x \\ B_x \end{bmatrix}}_{\text{parâmetros desconhecidos}}$$

Com as acelerações determinadas nas oito posições utilizadas no teste, podemos obter os parâmetros dos erros através da equação citada anteriormente.

Logo, podemos obter o seguinte modelo de compensação dos erros nos acelerômetros:

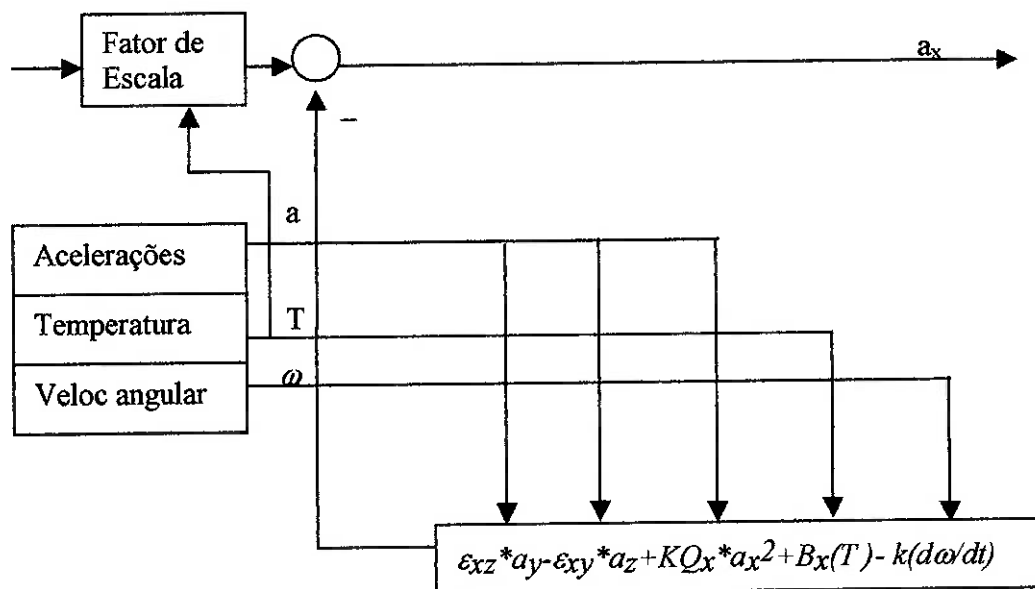


Figura 3.4 Compensação de erros em acelerômetros

Logo, temos as seguintes equações para os modelos de erros dos giroscópios e acelerômetros:

$$\begin{aligned}
 -M_y/H &= [1+DSF_x(T)] * [\omega_x + \alpha_{xz} * \omega_y - \alpha_{xy} * \omega_z - m(T) * a_x + q * a_y + n * a_x * a_z + b_x] \\
 M_x/H &= [1+DSF_y(T)] * [\omega_y + \alpha_{yx} * \omega_z - \alpha_{yz} * \omega_x - m(T) * a_y + q * a_x + n * a_y * a_z + b_y] \\
 M_z/H &= [1+DSF_z(T)] * [\omega_z + \alpha_{zy} * \omega_x - \alpha_{zx} * \omega_y - 2 * m(T) * a_z + 2q * a_y + 2n * a_x * a_z + b_z] \\
 U_y/SF_y &= [1+DK_y(T)] * [a_y + \varepsilon_{yx} * a_z - \varepsilon_{yz} * a_x - KQ_y * a_y^2 + B_y(T)] \\
 U_x/SF_x &= [1+DK_x(T)] * [a_x + \varepsilon_{xz} * a_y - \varepsilon_{xy} * a_z - KQ_x * a_x^2 + B_x(T)] \\
 U_z/SF_z &= [1+DK_z(T)] * [a_z + \varepsilon_{zy} * a_x - \varepsilon_{zy} * a_y - KQ_z * a_z^2 + B_z(T)]
 \end{aligned}$$

Dessa forma, já delineamos quais parâmetros de erros são imprescindíveis na compensação dos sensores inerciais.

Tendo com ferramenta os ensaios citados anteriormente, utilizaremos os parâmetros de erros de um DTG (giroscópio sintonizado dinamicamente) e de um acelerômetro Q-flex, ambos ensaiados em laboratórios da Marinha do Brasil e demonstrados na tabela seguinte:

	<i>Acelerômetro Q-flex</i>	<i>DTG</i>
<b>Fator de Escala</b>	9.407 V/g	1656.6 °h/mA
<b>Bias</b>	1658 ug	-289.9 °h
<b>Desalinhamentos</b>	5175 urad e -2413 urad	-0.225° e -0.026°
<b>Anisoelelasticidade</b>	X	-5.76 °h/g <sup>2</sup>
<b>Desbalanceamento de massa</b>	X	-108.4 °h/g
<b>Quadratura</b>	-2 ug/g <sup>2</sup>	-13.72 °h/g

TABELA I - Parâmetros de erros

Foi uma comparação com os sinais de entrada e saída dos sensores no SIMULINK do MATLAB, levando-se em consideração os valores das acelerações e velocidades angulares oferecidas pelos ensaios, como forma de exemplificar a compensação desses parâmetros de erros em um giroscópio:

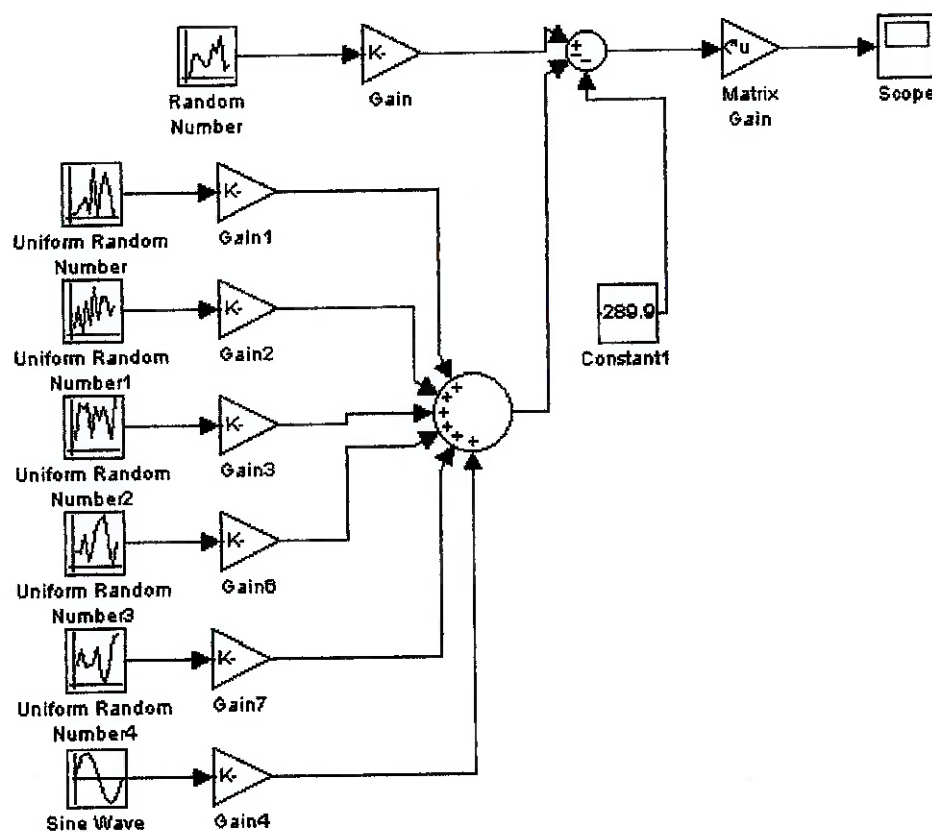


Figura 3.5 Simulação de erros nos giroscópios

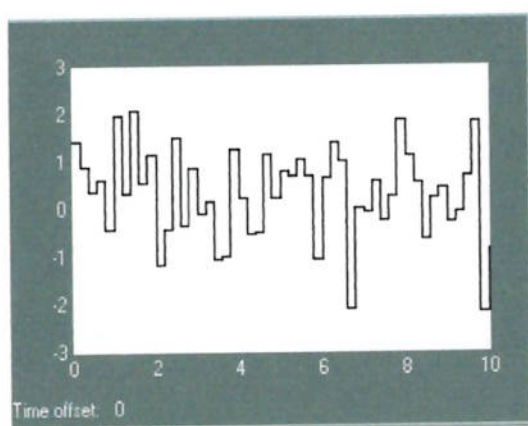


Figura 3.6 Corrente Elétrica

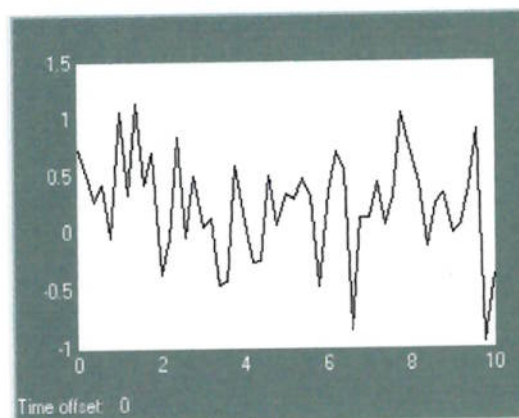


Figura 3.7 Velocidade angular

Para ilustrar o nosso modelo, vemos nos gráficos acima a influência dos parâmetros de erros compensáveis na interpretação dos dados de um giroscópio sintonizado dinamicamente, utilizando os valores fornecidos pela tabela I.

### 3.5 Propagação dos erros no tempo

No caso dos giroscópios, é gerado um sinal proporcional à velocidade angular do veículo somada a ruídos e desvios (*bias*). Para curtos intervalos de tempo, os desvios podem ser considerados constantes. Isto pode ser descrito pela equação abaixo:

$$\theta_m = \int (\theta' + b + w) dt = \theta + b.t + \int w.dt \quad (3.11)$$

Assim, integrando-se o sinal obtido pelos giroscópios, temos o ângulo de rotação do veículo adicionado a dois termos: um *random walk* devido ao ruído  $w$  (ruído do sensor ou *bias* variável) e outro termo que aumenta linearmente com tempo e é proporcional ao *bias* do giroscópio ( $b$ , que é uma constante). O erro causado pelo *bias* dos giroscópios irá gerar uma avaliação incorreta da orientação dos eixos dos acelerômetros  $x$  e  $y$ , acoplando uma componente da aceleração do eixo  $x$  no eixo  $y$ . Uma aceleração constante  $a_x$  acoplada no eixo  $y$  irá introduzir erros na aceleração, velocidade e posição na componente  $y$ . Assumindo que os ângulos envolvidos sejam pequenos, estes erros podem ser calculados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ea_y &= a_x.b.t \\ ev_y &= 1/2 a_x.b.t^2 \\ ep_y &= 1/6 a_x.b.t^3 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Desta forma, o *bias* constante dos giroscópios pode ocasionar erros no cálculo da posição que são proporcionais a  $t^3$ , como veremos na tabela II. Já o *bias* dos

acelerômetros pode ocasionar erros na estimativa da posição proporcionais ao quadrado do tempo:

$$\begin{aligned} ev_x &= b.t \\ ep_x &= \frac{1}{2} b.t^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para visualizarmos melhor o que foi dito, tomemos um sistema strapdown 2D de navegação, conforme é demonstrado na figura 3.8:

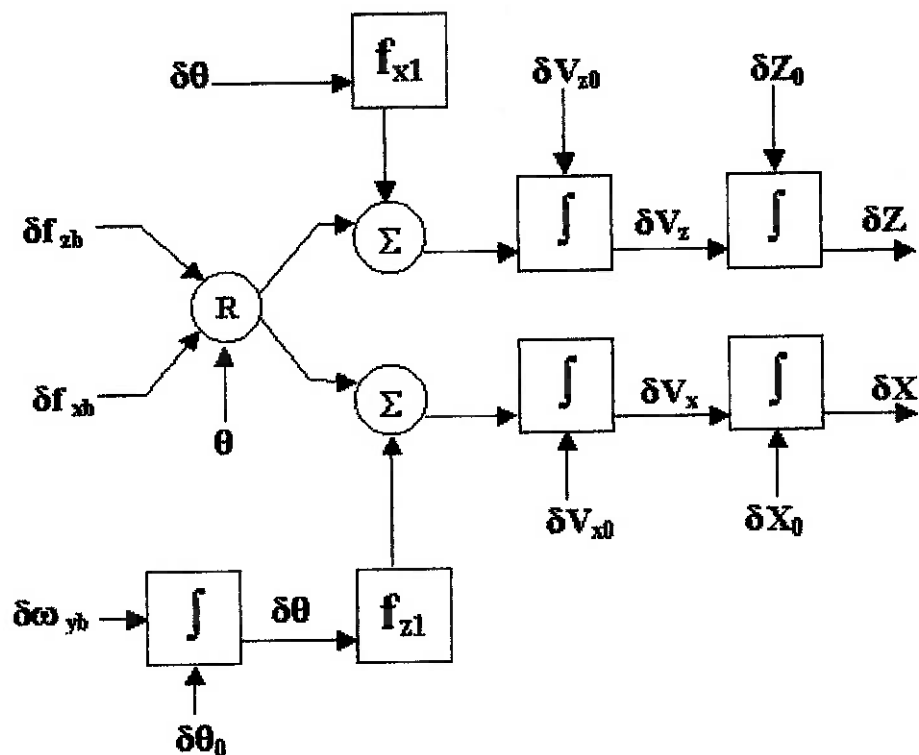


Figura 3.8 Diagrama de blocos dos erros em um sistema strapdown

O diagrama considera como fontes de erros as estimativas da atitude, velocidade e posição iniciais, bem como os “bias” nas medidas das forças específicas (acelerômetros) e velocidades angulares (giroscópios). Como forma de simplificar as análises, não foram consideradas as imperfeições na representação do campo gravitacional neste modelo.

Vemos, pelo diagrama, que uma estimativa errada da posição inicial do sistema simplesmente irá gerar um “offset” constante nas próximas estimativas de posição. Os efeitos dos erros na atitude e dos “bias” instrumentais no sistema são mais complexos, na medida em que sofrem integrações no tempo. Por exemplo, um desvio na saída do acelerômetro do eixo x,  $\delta f_{xb}$ , introduz as componentes  $\delta f_{xb} \cos \theta$  e  $-\delta f_{xb} \sin \theta$  nos eixos x e y do sistema de referência respectivamente. Esses erros, então, proporcionam um erro de posição proporcional ao quadrado do tempo,  $\delta f_{xb} \cos \theta t^2/2$  e  $-\delta f_{xb} \sin \theta t^2/2$ , como consequência da dupla integração necessária para aquisição das posições. Erros na atitude inicial se propagam de maneira similar, contudo os “bias” nos giroscópios causam um erro de posição proporcional ao cubo do tempo, devido às três integrações sofridas, como observamos no diagrama.

A contribuição destes erros na posição final do sistema é mostrada na tabela seguinte:

Fontes de erros		Erro na posição x	Erro na posição y
Posição inicial	$\delta X_0$	$\delta X_0$	-
	$\delta Y_0$	-	$\delta Y_0$
Velocidade inicial	$\delta V_{x0}$	$\delta V_{x0} t$	-
	$\delta V_{y0}$	-	$\delta V_{y0} t$
Atitude inicial	$\delta \theta_0$	$\delta \theta_0 f_{yi} t^2/2$	$-\delta \theta_0 f_{xi} t^2/2$
Bias nos acelerômetros	$\delta f_{xb}$	$\delta f_{xb} \cos \theta t^2/2$	$\delta f_{xb} \sin \theta t^2/2$
	$\delta f_{yb}$	$\delta f_{yb} \sin \theta t^2/2$	$\delta f_{yb} \cos \theta t^2/2$
Bias nos giros	$\delta \omega_{zb}$	$\delta \omega_{zb} f_{yi} t^3/6$	$-\delta \omega_{zb} f_{xi} t^3/6$

Tabela II Propagação dos erros em um sistema strapdown

### 3.5.1 Pêndulo de Schuler

A direção da vertical local na superfície da Terra pode ser determinada usando-se um pêndulo simples com uma determinada massa suspensa. Contudo, se a base em que o pêndulo estiver suspenso se mover com uma aceleração a, o pêndulo irá defletir de um ângulo  $\theta = a/g$ , e não irá mais

indicar a vertical local. Hipoteticamente, se o comprimento desse pêndulo fosse igual ao raio da Terra, ele sempre apontaria para a vertical independente de qualquer aceleração. Este é o conceito do pêndulo de Schuler, que, obviamente não terá este comprimento, mas funcionaria de modo equivalente, na medida em que a sua frequência de oscilação (0.00124 rad/s) indicaria o mesmo comportamento, pois:

$$\omega_S = \sqrt{g/R_0} = 0.00124 \text{ rad/s ou}$$

$$T_S = 2\pi/\omega_S = 2\pi\sqrt{R_0/g} = 84.4 \text{ minutos}$$

De modo a modelar erros dos acelerômetros e giroscópios, considerando a dinâmica do processo, temos as equações abaixo, que especificam as relações físicas entre estes sensores em apenas um eixo:

$$\begin{aligned}\Delta x'' &= a - g\phi \\ \phi' &= 1/R \Delta x' + \varepsilon\end{aligned}\quad (3.14)$$

Sendo:

$\Delta x$  - Erro de posição

$\Delta x'$  - Erro de velocidade

$\Delta x''$  - Erro de aceleração

$\phi$  - Erro de nivelamento da plataforma

$a$  - Ruído do acelerômetro

$\varepsilon$  - Ruído do giroscópio

Na primeira das equações (3.14), o erro de aceleração é devido a uma combinação de ruído do acelerômetro e uma componente da aceleração gravitacional que o acelerômetro mede devido ao erro de nivelamento da plataforma. A segunda das equações (3.14) modela a taxa de variação do erro de nivelamento da plataforma, que é resultante do ruído do giroscópio somado a um erro de velocidade linear que, quando projetado sobre a superfície terrestre,

transforma-se num erro de velocidade angular. O erro do acelerômetro, que integrado uma vez origina um erro de velocidade, causa um aumento no erro de nivelamento da plataforma (segunda das equações 3.14). Este aumento no erro de nivelamento causará um aumento na componente da aceleração da gravidade medida pelo acelerômetro horizontal (primeira das equações 3.14). Este erro cancelará em parte o ruído do acelerômetro. O fenômeno resultante da combinação destas duas fontes de erros é conhecido como Oscilação de Schuler (Figura 3.9) e é responsável pela estabilidade dos erros associados aos eixos horizontais.

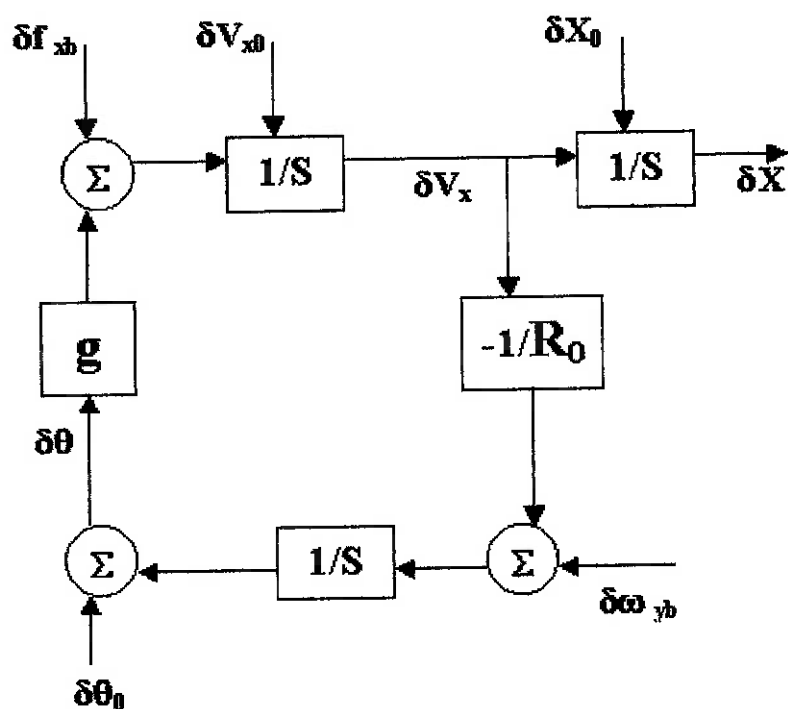


Figura 3.9 Oscilação de Schuler no canal horizontal

Em uma navegação em um sistema de eixo simples, erros no sistema irão proporcionar oscilações na frequência de Schuler. O diagrama de blocos mostrado na figura anterior mostra os erros nas estimativas iniciais da atitude, velocidade e posição do veículo ( $\delta\theta_0$ ,  $\delta V_0$  e  $\delta X_0$ , respectivamente), além de definir os “bias” nos giroscópios e acelerômetros ( $\delta\omega_{yb}$  e  $\delta f_{xb}$ ). A propagação



destes erros no tempo é demonstrada na tabela seguinte, com a compensação de Schuler:

Erros		Erro de posição
Posição inicial	$(\delta X_0)$	$\delta X_0$
Velocidade inicial	$(\delta V_0)$	$\delta V_x(\text{sen}\omega_{st})/\omega_s$
Atitude inicial	$(\delta\theta_0)$	$\delta\theta_0 R_0(1-\cos\omega_{st})$
Bias nos acelerômetros	$(\delta f_{xb})$	$\delta f_{xb}(1-\cos\omega_{st})/\omega_s^2$
Bias nos giroscópios	$(\delta\omega_{yb})$	$\delta\omega_{yb}R_0(t-(\text{sen}\omega_{st})/\omega_s)$

Tabela III Propagação dos erros com compensação de Schuler

Vemos pela tabela anterior apenas os “bias” nos giroscópios fornecem uma componente de erro que aumenta linearmente com o tempo ( $\delta\omega_{yb}R_0t$ ) adicionada a uma componente oscilatória.

Chegamos à conclusão, pela análise feita, de que a performance de um sistema de navegação pode ser deduzida a partir do conhecimento da precisão dos giroscópios utilizados. Por exemplo, um sistema que possui um giroscópio com a precisão de  $0.01^\circ/\text{h}$ , seria capaz de navegar com uma precisão de  $\sim 1\text{Km}/\text{hora}$ .

A seguir temos a simulação de um movimento aproximadamente circular realizado por um ROV (Veículo Operado Remotamente) em 3D, que servirá como teste de validação do software apresentado neste trabalho (capítulo 5), onde introduzimos uma deriva aleatória com distribuição normal e desvio padrão de  $0.5^\circ/\text{hora}$ , de modo a não só constataremos a importância dos sensores girométricos em qualquer Sistema de Navegação Inercial, mas também de visualizarmos a performance de um DTG (Giroscópio Sintonizado Dinamicamente) da Marinha do Brasil em três dimensões, que possui a mesma deriva aleatória supracitada.

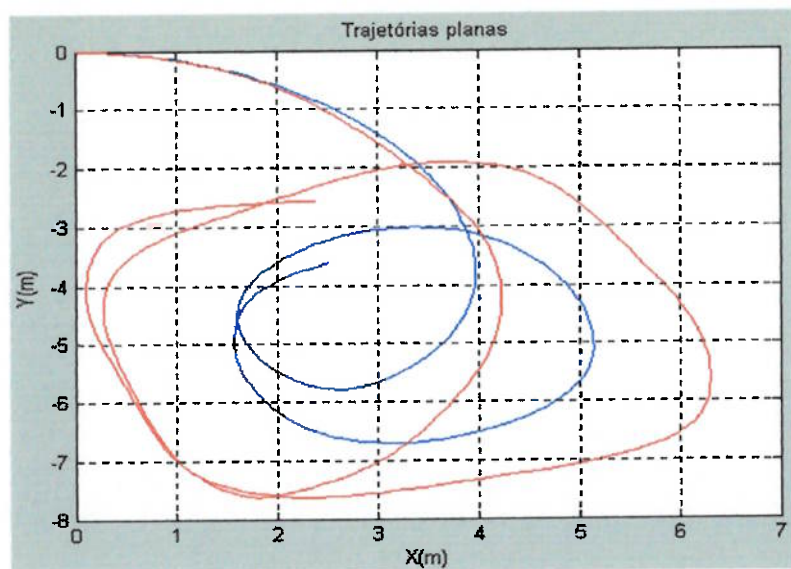


Figura 3.10 Trajetórias de um ROV com e sem deriva nos giros

A seguir temos a evolução do desvio causado pela deriva de  $0.5^\circ/h$  na trajetória do ROV:

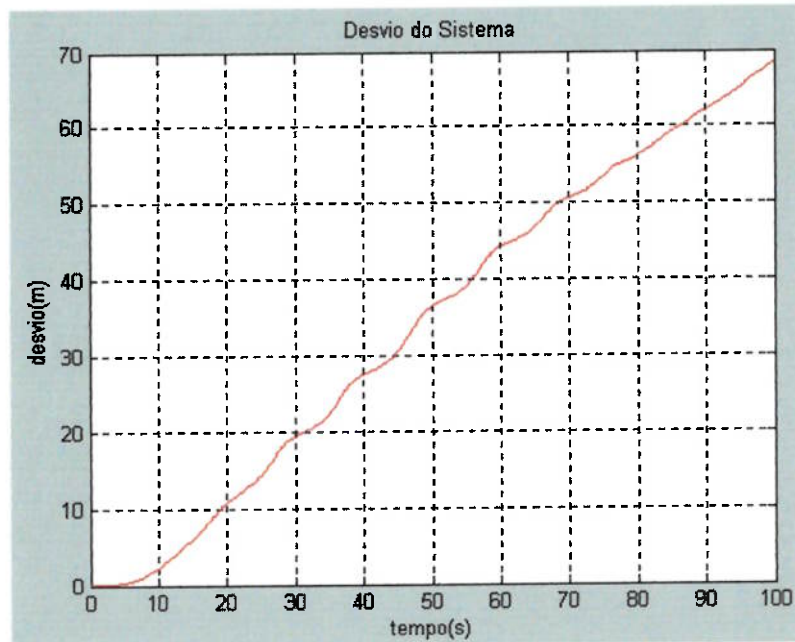


Figura 3.11 Desvio causado pela deriva na trajetória do ROV

Da mesma maneira que fizemos com o ROV, iremos introduzir a mesma deriva, só que agora no plano, em um modelo de manobra desenvolvido pelo laboratório hidro-aerodinâmico em Lyngby, na Dinamarca para uma classe Mariner de embarcação. Os principais dados desta classe são os seguintes:

Comprimento: 171.8m

Volume deslocado: 18541m<sup>3</sup>

Velocidade de cruzeiro: 15 nós

Desta maneira, tendo-se como entradas o ângulo de leme (5°) e a velocidade de cruzeiro (15 nós), e introduzindo-se uma deriva aleatória com um desvio padrão de 0.5°/h em seus giroscópios, temos as seguintes trajetórias da embarcação:

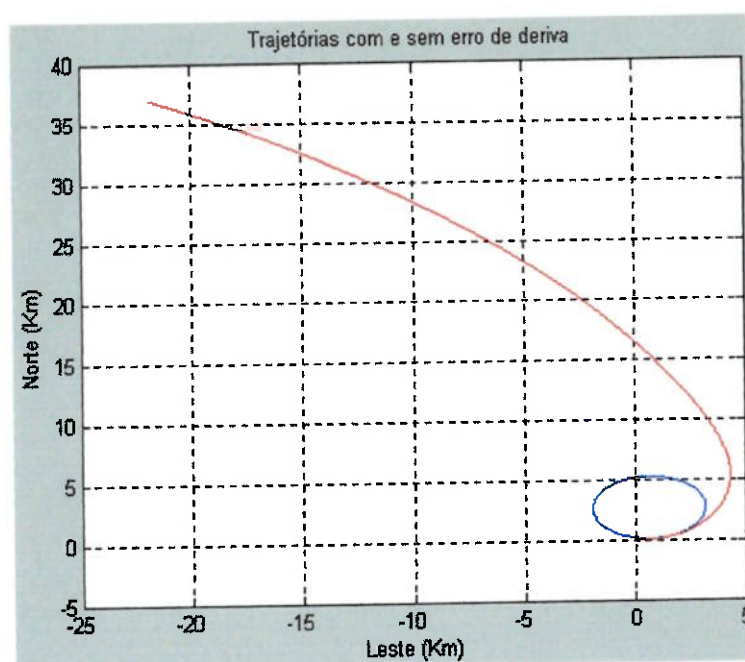


Figura 3.12 Trajetória da embarcação com e sem os erros de deriva

Neste caso, a circunferência em azul demonstra a trajetória da embarcação sem os erros de deriva, que quando introduzidos, nos fornece a trajetória em vermelho. Na próxima figura veremos como esse desvio entre essas duas trajetórias se propaga no tempo:

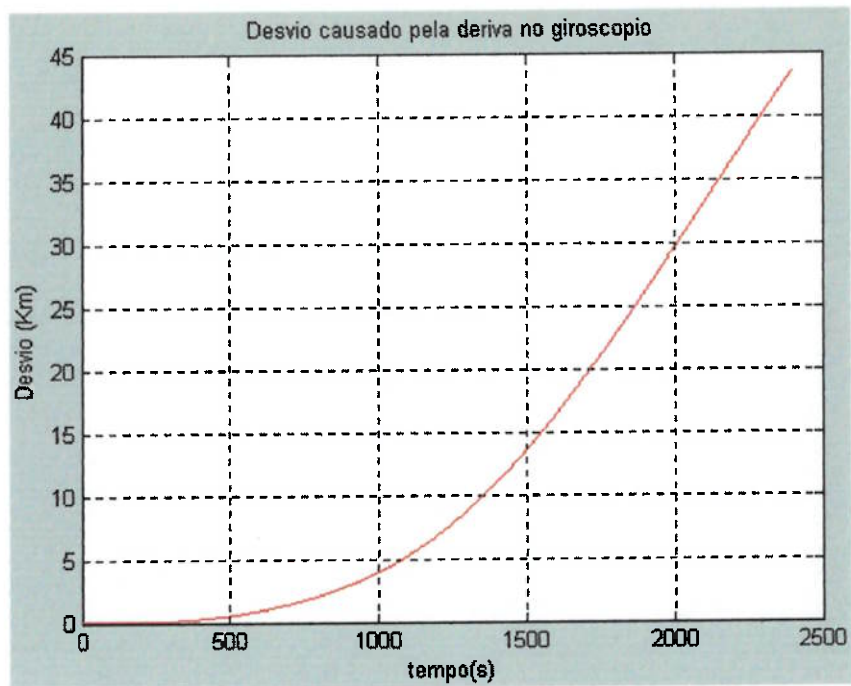


Figura 3.13 Propagação do desvio entre as trajetórias

## 4.0 ALINHAMENTO DO SISTEMA DE NAVEGAÇÃO INERCIAL

### 4.1 Conceitos básicos e equacionamento

O alinhamento é o processo pelo qual a orientação dos eixos do sistema de navegação inercial é ajustada em relação ao Sistema de Coordenadas de Navegação.

O sistema inercial consta de um conjunto de giroscópios e acelerômetros agrupados de forma a fornecerem informações de taxas angulares e informações de forças específicas em três eixos, mutuamente perpendiculares. Em um arranjo convencional de sensores, os eixos sensíveis dos giroscópios são fisicamente alinhados aos eixos de entrada dos acelerômetros. Essencialmente, o processo de alinhamento será descrito com maiores detalhes a seguir.

Consideremos, primeiramente, o alinhamento de uma plataforma estabilizada, em que o agrupamento de sensores pode rotacionar fisicamente, de forma a buscarem o alinhamento com o sistema de referência local.

Neste tipo de plataforma, o alinhamento é alcançado, ajustando-se a orientação da plataforma até que as medidas das forças específicas fornecidas pelos acelerômetros e as acelerações fornecidas pelo planeta se tornem iguais. As componentes horizontais da gravidade nas direções Norte(N) e Leste(E) são normalmente iguais a zero. Logo, o agrupamento de sensores é rotacionado até que as saídas dos acelerômetros nos eixos N e E seja nula.

Um processo equivalente pode ser utilizado para alinhar um sistema *strapdown*, cujas informações sobre a atitude podem ser armazenadas tanto como uma matriz de cossenos diretores, como pelos parâmetros do *quaternion* (2.5). Neste caso, o objetivo do processo de alinhamento angular consiste na determinação da matriz dos cossenos diretores ou dos parâmetros do *quaternion*, que definem a relação entre os eixos dos sensores inerciais e o sistema local de referência.

Desde que as componentes verdadeiras da gravidade ( $g$ ) nas direções norte(N) e leste(E) sejam nulas, qualquer valor diferente de zero na

medida dos acelerômetros nestas direções será interpretado como erro e devidamente armazenado. Geralmente trata-se de um erro de conhecimento da vertical local. Os princípios deste método são ilustrados a seguir no plano:

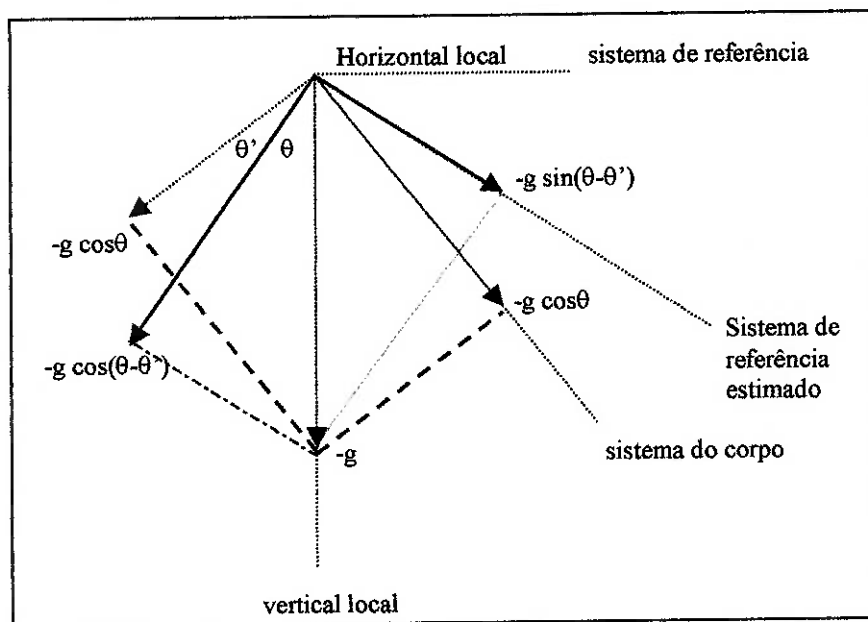


Figura 4.1 Alinhamento do vetor gravidade no plano

Os acelerômetros fornecem as medidas das acelerações verdadeiras nos eixos do corpo,  $-g \sin \theta$  e  $-g \cos \theta$  respectivamente. Essas medidas são realizadas através do ângulo  $\theta'$ , que é uma estimativa do verdadeiro ângulo que o corpo faz com sistema de referência estimado, mostrado na figura 4.1.

A componente horizontal no plano estimado, " $g_x$ ", é dada por:

$$g_x = -g \sin(\theta - \theta') \quad (4.1)$$

$\theta'$  deve ser ajustado até " $g_x$ " ser igual a zero, ou seja,  $\theta' = \theta$ , onde o sistema de referência estimado torna-se coincidente com o sistema de referência verdadeiro.

Tendo definido a vertical local, torna-se necessária a determinação da orientação do azimuth local no plano horizontal, ou seja, faz-se necessário o alinhamento em relação ao norte verdadeiro. Este alinhamento é conseguido através do conhecimento das componentes das taxas de rotação da Terra ( $\Omega$ ). Assumindo que os giroscópios possuem precisão suficiente para detectar essas taxas, as informações da atitude são armazenadas e ajustadas até que a

componente na direção leste (E) da rotação seja nula. O diagrama seguinte ilustra o alinhamento em azimute:

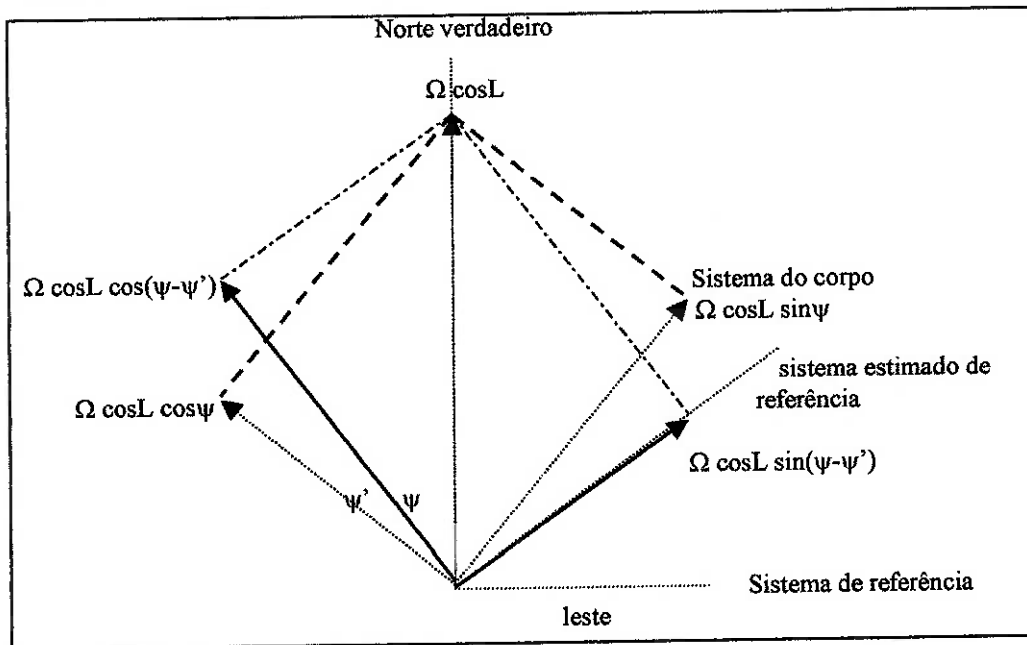


Figura 4.2 Alinhamento em azimute

Nesse caso, " $\psi$ " é a orientação verdadeira do eixo  $x$  do sensor em relação ao norte verdadeiro e " $\psi'$ " é a estimativa deste valor. As componentes da rotação da Terra ( $\Omega$ ) detectadas pelos giroscópios dos eixos  $x$  e  $y$  são  $\Omega \cos L \sin \psi$  e  $\Omega \cos L \cos \psi$  respectivamente, onde " $L$ " é a latitude do sistema de alinhamento. A componente da rotação da Terra na direção leste (E), definida por " $\omega_e$ ", é expressa por:

$$\omega_e = \Omega \cos L \sin(\psi - \psi') \quad (4.2)$$

" $\psi'$ " é ajustado até " $\omega_e$ " se tornar nulo, ou seja, até que  $\psi = \psi'$ .

## 4.2 Implementação computacional de desalinhamentos

O objetivo do alinhamento é determinarmos a matriz dos cossenos diretores (**Cnb**) ou dos parâmetros do *quaternion*, que expressam a atitude do veículo no *sistema local de navegação*.

Com o veículo estacionado no chão, os sensores irão medir componentes das forças específicas necessárias para superar a força da gravidade e as taxas de rotação da Terra,  $\mathbf{g}_b$  e  $\boldsymbol{\omega}_{ieb}$  respectivamente. Tais vetores serão escritos em relação ao *sistema local de navegação*, através da seguinte equação:

$$\mathbf{g}_b = \mathbf{C}_{bn} * \mathbf{g}_n \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ieb} = \mathbf{C}_{bn} * \boldsymbol{\omega}_{ien} \quad (4.4)$$

Onde  $\mathbf{g}_n = [0 \ 0 \ -g]^t$  e  $\boldsymbol{\omega}_{ien} = [\Omega \cos L \ 0 \ -\Omega \sin L]^t$ , em que  $\Omega$  e  $L$  representam a taxa de rotação da Terra e a latitude respectivamente. Dado o conhecimento dessas duas quantidades, os elementos da matriz dos cossenos diretores ( $\mathbf{C}_{nb}$ ) podem ser computados a partir de  $\mathbf{g}_b = [g_x \ g_y \ g_z]^t$  e  $\boldsymbol{\omega}_{ieb} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^t$ , como se segue:

$$\left. \begin{aligned} c_{31} &= -g_x/g & c_{11} &= (\omega_x/\Omega \cos L) - (g_x \tan L/g) \\ c_{32} &= -g_y/g & c_{12} &= (\omega_y/\Omega \cos L) - (g_y \tan L/g) \\ c_{33} &= -g_z/g & c_{13} &= (\omega_z/\Omega \cos L) - (g_z \tan L/g) \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Os outros elementos podem ser determinados através da propriedade de ortogonalidade da matriz dos cossenos diretores:

$$\left. \begin{aligned} c_{21} &= -c_{12} * c_{33} + c_{13} * c_{32} \\ c_{22} &= c_{11} * c_{33} - c_{31} * c_{13} \\ c_{23} &= -c_{11} * c_{32} + c_{31} * c_{12} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Pelas equações acima, verificamos que haverá indeterminação nos valores dos elementos da matriz, quando o sistema se encontrar nos pólos norte ou sul, ou seja, quando  $L = \pm 90^\circ$ .

Contudo, devido aos erros apresentados pelos sensores, o procedimento acima nos fornecerá uma matriz estimada ( $\mathbf{C}'_{nb}$ ) com erros. O desalinhamento entre o sistema de navegação atual e o computado pode ser expresso pela matriz  $\mathbf{B}$ , e, dessa forma, podemos dizer que:

$$\mathbf{C}'_{nb} = \mathbf{B} * \mathbf{C}_{nb} \quad (4.7)$$

Para pequenos desalinhamentos angulares, a matriz  $\mathbf{B}$  pode ser expressa pela seguinte maneira:



$$B = I - \Psi \quad (4.8)$$

Onde  $I$  é uma matriz identidade  $3 \times 3$  e:

$$\Psi = \begin{bmatrix} 1 & -\delta\gamma & \delta\beta \\ \delta\gamma & 1 & -\delta\alpha \\ -\delta\beta & \delta\alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

onde  $\delta\alpha$ ,  $\delta\beta$  e  $\delta\gamma$  são os desalinhamentos em torno dos eixos North (N), East (E) e a vertical local (D) do sistema local respectivamente.

*O processo de alinhamento consiste basicamente no ajuste dos acelerômetros dos eixos N e E, até que suas componentes da aceleração da gravidade sejam nulas. Encontrada a vertical local, o sistema é rotacionado em torno dela até que o giroscópios do eixo E não apresente qualquer componente da taxa de rotação da Terra.*

Na situação particular em que o sistema do corpo está naturalmente alinhado com o sistema de referência local, ou seja,  $Cnb = I$ , a atitude resultante do veículo pode ser expressa como se segue:

$$\left. \begin{aligned} \delta\alpha &= By/g \\ \delta\beta &= -Bx/g \\ \delta\gamma &= Dy/\Omega\cos L \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

onde  $By$ ,  $Bx$  e  $Dy$  representam os desvios dos acelerômetros dos eixos  $x$  e  $y$  e do giroscópio do eixo  $y$  respectivamente.

De uma forma mais geral, quando o sistema não está alinhado ao sistema de referência local, os desvios dos sensores em cada uma das equações acima serão compensados pela combinação de desvios nos três giroscópios e nos três acelerômetros. Contudo, o alinhamento demonstrado aqui, em que é usado apenas um conjunto de medidas dos sensores, ficaria mais preciso caso fosse usada uma série de medidas seqüenciais, como descrevemos no ANEXO A.

## 5.0 VALIDAÇÃO DO SOFTWARE

Como forma de validarmos o software, que utiliza o quatêrnion para expressar o sistema de coordenadas do veículo em relação ao sistema de coordenadas de navegação, com uma situação real, utilizaremos testes realizados com um ROV (*remotely operated vehicle*), em que foram monitoradas suas velocidades e deslocamentos conforme demonstra a figura 5.1.

A figura seguinte mostra os resultados obtidos em um teste em que o veículo submarino é submetido a um *degrau* como entrada dos seus propulsores e todas as transformações de coordenadas são feitas através dos ângulos de Euler.

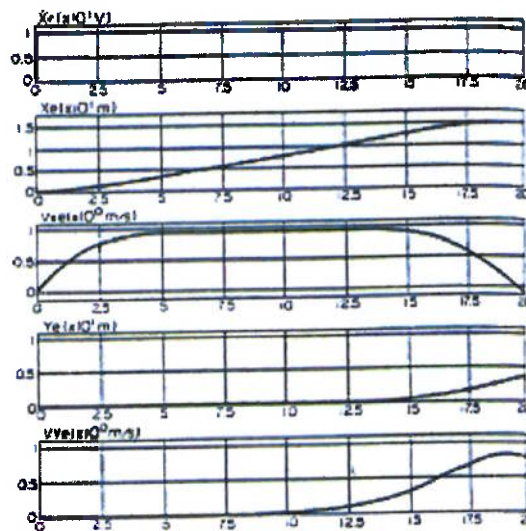


Figura 5.1 Resposta a um *degrau* nos propulsores do ROV (Euler)

Como uma das formas de validarmos o software de navegação, geramos as mesmas trajetórias percorridas pelo ROV, conforme veremos nas próximas figuras, porém utilizando o quatêrnion para expressar o sistema de coordenadas do veículo em relação ao sistema de coordenadas de navegação.

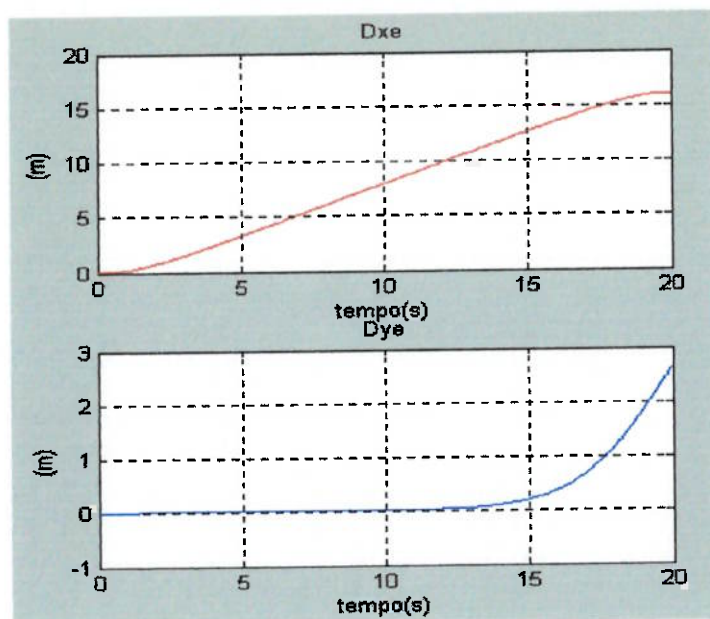


Figura 5.2 Deslocamentos do ROV nas direções x e y (Quatêrnion)

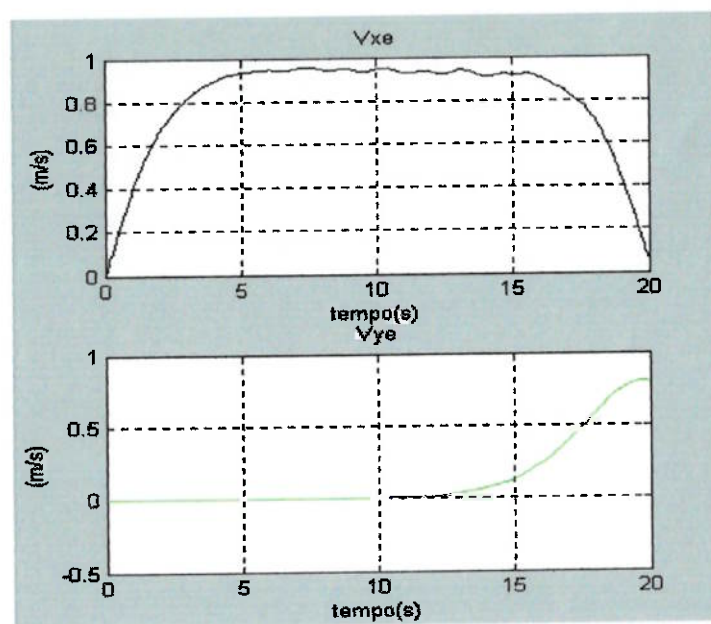


Figura 5.3 Velocidades do ROV nas direções x e y (Quatêrnion)

## 6.0 FILTRO DE KALMAN

### 6.1 Conceitos básicos

O filtro de Kalman é um procedimento extremamente efetivo e versátil para combinarmos os dados de um sensor ruidoso com estimativa do estado de um sistema que possui um certo grau de imprecisão em sua dinâmica.

Em nosso caso, os sensores ruidosos serão os sensores inerciais (acelerômetros e giroscópios) e o estado do nosso sistema será a posição do veículo ensaiado. A imprecisão do sistema tanto pode ser em decorrência dos distúrbios no veículo, causados pelos operadores e/ou pelo próprio meio (superfície irregular e ventos, por exemplo), como também por imperfeições do equipamento de medição, conforme já discutimos os principais.

Utilizando-se esse algoritmo recursivo (filtro de Kalman) para a estimação de estados  $x_k$  de um sistema dinâmico a partir dos valores das medições ( $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ ), temos as seguintes equações, que regem seu comportamento dinâmico:

$$x_{k+1} = A.x_k + B.u_k + C.w_k \quad (6.1)$$

$$y_k = H.x_k + G.e_k \quad (6.2)$$

Onde,  $x_k$  é o vetor de estados,  $u_k$  é o vetor de entradas,  $y_k$  é o vetor de medidas de referência,  $w_k$  é o vetor de ruídos aleatórios do processo e  $e_k$  é o vetor de erros de medição. Temos que  $w_k$  é um processo aleatório ruído branco representado por um vetor de  $m$  componentes e tem matriz de covariância unitária (ou seja,  $E(w_k w_k^T) = I_m$ ) e que a variável aleatória  $x_0$  e o processo  $w_k$  são descorrelacionados. Assume-se ainda que a média da variável  $x_0$  (dada por  $m_0$ ) e sua covariância (dada por  $P_0$ ) são conhecidas. As matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes que definem a dinâmica do processo, enquanto que  $G$  e  $H$  são matrizes que definem o modelo de medição. Os elementos diagonais das matrizes  $G$  e  $C$ , que

modelam covariâncias de erros e ruídos, devem ser escolhidos convenientemente de acordo com a aplicação.

Para se utilizar o filtro Kalman, deve-se obter uma referência do vetor de estados que, no nosso caso, será a posição do veículo fornecida pelo GPS. É importante que o ruído do processo  $w$  não tenha o mesmo perfil do ruído da referência ( $e$ ), pois o filtro não funcionaria corretamente. Como o ruído da DMU é um ruído que se acumula no tempo e o ruído do GPS não, o filtro de Kalman pode combinar satisfatoriamente essas características.

Na figura seguinte vemos o diagrama esquemático do filtro de Kalman:

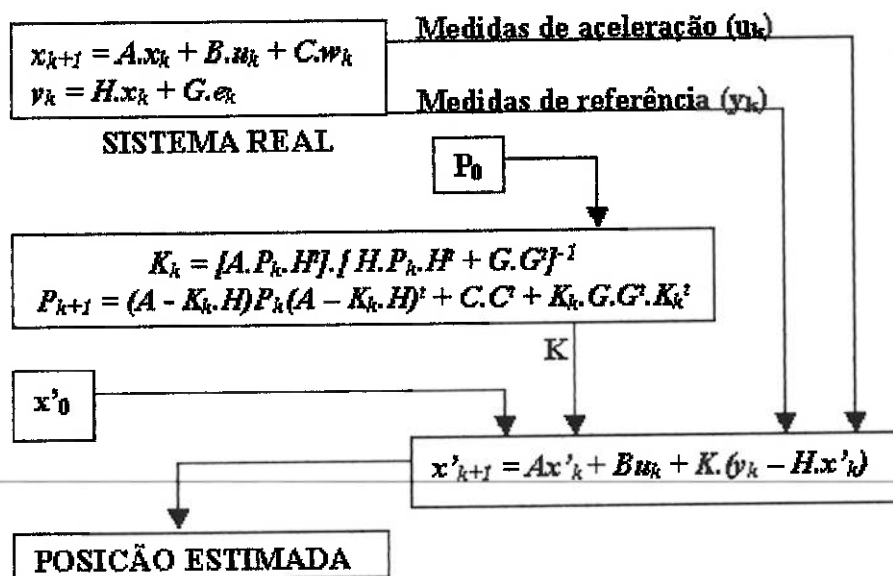


Figura 6.1 Diagrama Esquemático do Filtro de Kalman

As equações seguintes são conhecidas como *equações de Riccati* e são utilizadas no algoritmo para a propagação da matriz de covariância e são elas que, de uma maneira geral, modelam e gerenciam as incertezas da dinâmica do sistema (Grewal, 1993):

$$K_k = [A \cdot P_k \cdot H^T] \cdot [H \cdot P_k \cdot H^T + G \cdot G^T]^{-1} \quad (6.3)$$

$$P_{k+1} = (A - K_k H) P_k (A - K_k H)^t + C C^t + K_k G G^t K_k^t \quad (6.4)$$

## 6.2 Modelagem do Sistema no espaço de estados discreto

O modelo utilizado para estimarmos a posição de um veículo a partir dos dados fornecidos por uma Central Inercial será descrito no espaço de estados. Isso facilitará a posterior implementação da estimação recursiva através do filtro de Kalman, que é aplicado a modelos de espaço de estados. Assim, nosso sistema será modelado do seguinte modo:

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k + C w_k$$

$$y_k = H x_k + G e_k$$

Neste caso, podemos utilizar as leis do movimento de Newton para obter a posição a partir da aceleração ( $p_t$  é a posição do veículo no instante  $t$ ,  $v_t$  é a velocidade do veículo no instante  $t$  e  $a_t$  é a aceleração do veículo no instante  $t$ ):

$$v_t = dp_t/dt$$

$$a_t = dv_t/dt \quad (6.5)$$

Se o período de amostragem do sistema for igual a  $T$ , teremos o seguinte modelo discreto entre duas medições consecutivas (essa aproximação é válida apenas para intervalos de amostragem muito pequenos, pois, assim, entre duas amostragens consecutivas, a aceleração medida pelos acelerômetros é considerada constante e a equação seguinte pode ser utilizada):

$$p_{k+1} = p_k + v_k T + \frac{1}{2} a_k T^2 \quad (6.6)$$

As medidas a que temos acesso, no caso da Central Inercial, são as acelerações nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  (já transformadas para o sistema de coordenadas de navegação). Assim,  $a_k$  deverá ser o nosso vetor de entradas, resultando no seguinte modelo matricial discreto:

$$\begin{pmatrix} xk+1 \\ yk+1 \\ zk+1 \\ vxk+1 \\ vyk+1 \\ vzk+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} xk \\ yk \\ zk \\ vxk \\ vyk \\ vzk \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5T^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5T^2 \\ T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} axk \\ ayk \\ azk \end{pmatrix} +$$

$$10. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} wk1 \\ wk2 \\ wk3 \\ wk4 \\ wk5 \\ wk6 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Neste modelo, o vetor de estados é formado por 6 elementos: x, y e z são as três coordenadas de posição do veículo e vx, vy e vz são as componentes da velocidade do veículo. O vetor de entrada do sistema é formado por três elementos, que são as três componentes da aceleração do veículo fornecidas pela Central Inercial (já no sistema de coordenadas de navegação). O vetor wk, composto por seis elementos independentes, é um vetor de ruídos aleatórios do processo. T é o período de amostragem utilizado no processo.

Para determinarmos a posição de um veículo com uma Central Inercial, basta utilizarmos o modelo acima. No entanto, uma simples simulação do modelo acima irá gerar erros de posição muito altos após alguns poucos minutos, e isso se deve à presença de ruídos aleatórios nas medidas fornecidas pelos acelerômetros e giroscópios. Sendo este ruído imprevisível, é muito complicado compensá-lo através de métodos determinísticos. O modo mais adequado de o fazermos é utilizando o filtro de Kalman. Para isto, devemos ter uma referência do vetor de estados (no nosso caso é a posição do GPS), que também pode apresentar erro, o que já está considerado no modelo. O importante é que os ruídos da Central inercial e do GPS não tenham o mesmo

perfil, o que não acontece, visto que os ruídos da Central são cumulativos no tempo e o do GPS não.

O modelo de medição de referência está descrito abaixo:

$$\begin{bmatrix} yk1 \\ yk2 \\ yk3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} xk \\ yk \\ zk \\ vxk \\ vyk \\ vzk \end{bmatrix} + 1.5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ek1 \\ ek2 \\ ek3 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Neste modelo,  $e$  é um vetor de erros das medidas de referência (GPS), e  $y$  é o vetor destas medidas (posições).

No caso de uma fusão sensorial da central inercial com um velocímetro, como foi simulado com a trajetória de um pig (encapsulamento de sensores e dispositivos eletrônicos embarcados utilizados para inspecionar dutos na indústria petrolífera), o único modelo que muda é o de medição, que seria descrito da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} yk1 \\ yk2 \\ yk3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} xk \\ yk \\ zk \\ vxk \\ vyk \\ vzk \end{bmatrix} + 0.05 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ek1 \\ ek2 \\ ek3 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

Neste caso, as medidas de referência seriam as velocidades (no sistema de coordenadas de navegação).

Para que se possa saber, então, onde as falhas dos dutos petrolíferos foram detectadas, faz-se necessária uma estimação da posição do pig. Isto pode ser realizado embarcando-se uma Central Inercial para fornecer dados de acelerações e velocidades angulares, que combinadas com as velocidades instantâneas fornecidas indiretamente por um odômetro fixado no pig, nos fornece um Sistema de Navegação Inercial de fusão sensorial.



Abaixo temos uma simulação de trajetória realizada dentro de um duto petrolífero:

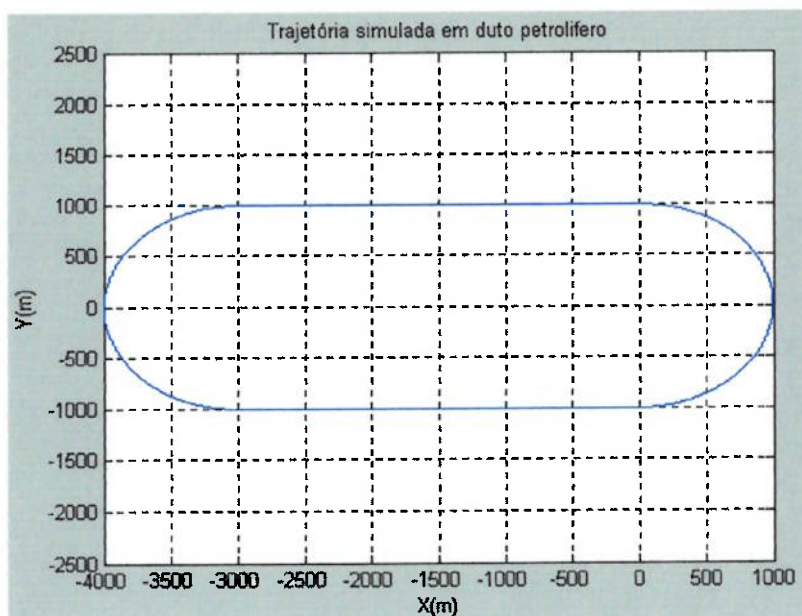


Figura 6.2 Simulação de trajetória realizada dentro de um duto petrolífero

Com uma velocidade constante de 1m/s, introduzimos uma deriva aleatória com uma distribuição normal de  $0.5^\circ/\text{h}$  (deriva do DTG da Marinha do Brasil), demonstrada na figura seguinte, aos giroscópios da central embarcada no pig.

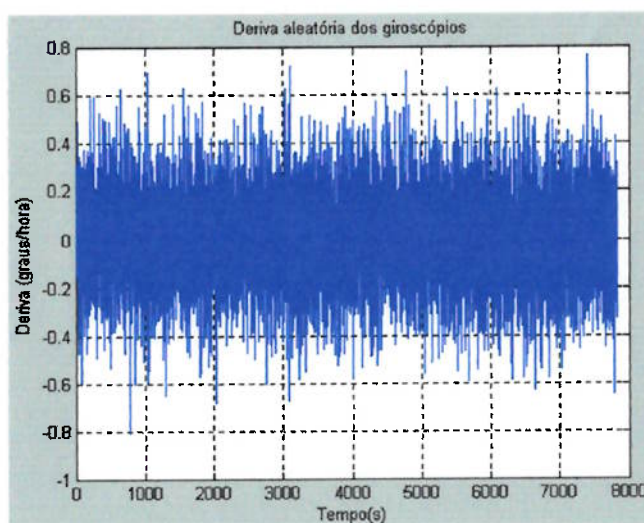


Figura 6.3 Deriva aleatória dos giroscópios

Introduzindo-se esta deriva, os sensores inerciais iriam indicar a seguinte trajetória do pig inercial:

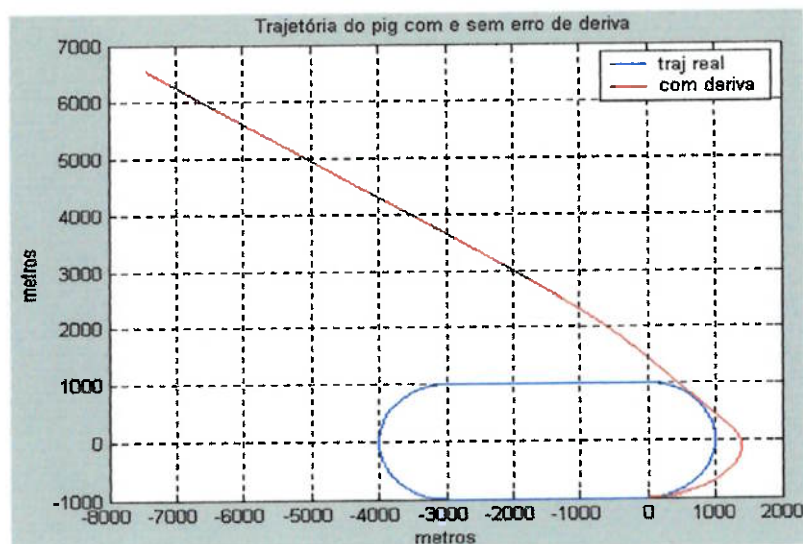


Figura 6.4 Trajetória com deriva aleatória nos giroscópios

A figura seguinte demonstra a propagação do desvio entre as trajetórias no tempo:

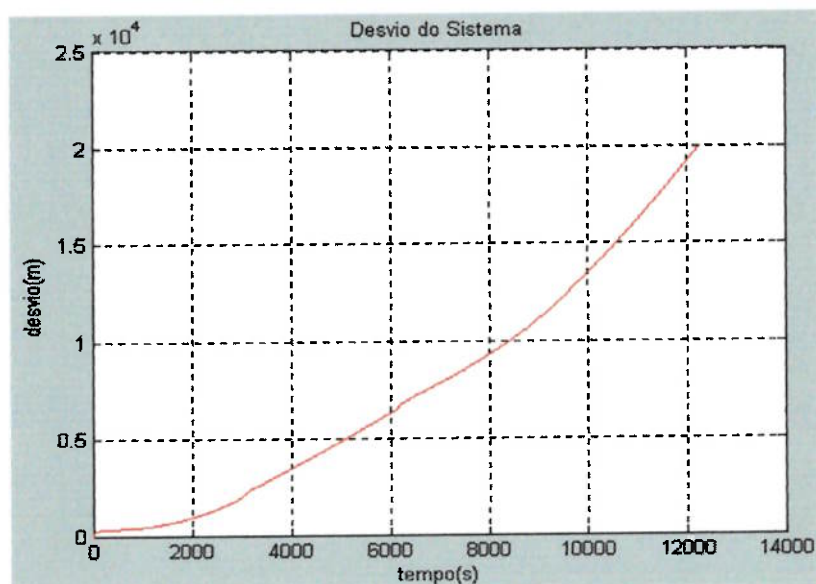


Figura 6.5 Propagação do desvio no tempo

Realizando-se a fusão sensorial, tendo como medidas de referências as velocidades instantâneas conhecidas do pig, encontramos a seguinte trajetória:

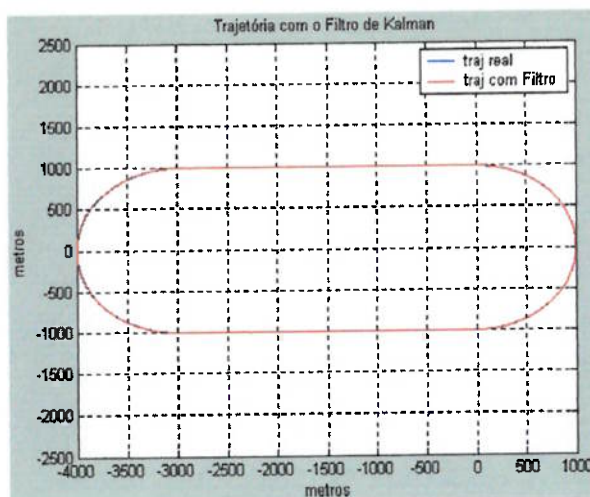


Figura 6.6 Trajetória do pig com o Filtro de Kalman

Com a deriva aleatória dada e sem a utilização do Filtro de Kalman, o erro na posição final chega à ordem de  $-12\text{Km}$  no eixo x e  $10.5\text{ Km}$  no eixo y após um período de aproximadamente 3 horas de simulação. Já com a utilização do Filtro (velocidades como medidas de referência em uma frequência de amostragem de  $\sim 0.7\text{Hz}$ ), chegamos ao erro da figura seguinte.

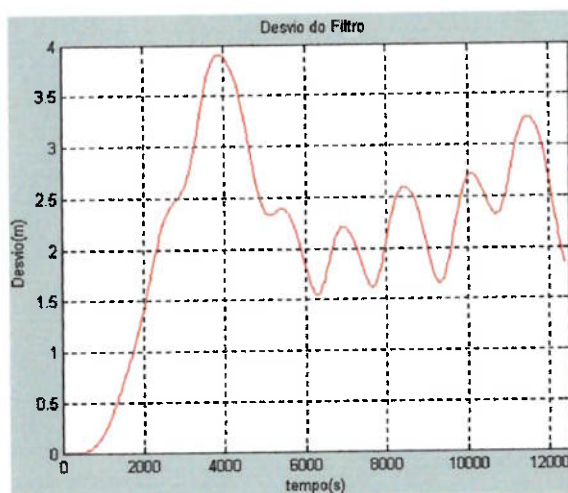


Figura 6.7 Propagação do desvio no tempo

## **7.0 ENSAIOS E DISCUÇÕES**

### **7.1 Ensaio automotivo (DMU/GPS)**

Obviamente, os erros e ruídos introduzidos ao sistema são cumulativos e integrados ao longo do tempo, o que constitui um dos pontos mais vulneráveis dos ensaios realizados. Entretanto, com a alta taxa de amostragem fornecida pela DMU (em torno de 50 HZ), é possível realizarmos uma fusão sensorial com um DGPS (posições de referência), utilizando-se um algoritmo de fusão sensorial (filtro de Kalman).

Para a realização dos ensaios, usamos uma Unidade de Medida Dinâmica (DMU) a bordo de um automóvel. Foi utilizado o modelo VG600AA-202, fabricado pela Crossbow e indicado na figura abaixo:



Figura 7.1 Unidade de Medida Dinâmica (DMU)

Esta Central foi projetada principalmente para a realização de testes automotivos. Ela utiliza três acelerômetros do tipo MEMS (micro electro mechanical machines) e três giroscópios de fibra ótica (FOG – fiber optic gyro). Os acelerômetros são micro dispositivos de silício que utilizam capacitância diferencial para medir acelerações. Além disso, a Central possui um módulo de Processamento Digital de Sinais para compensação de erros determinísticos. Também foi utilizado o software Gyroview, adquirido juntamente com a Central Inercial. Este software é responsável pela aquisição de dados a partir da Central

Inercial ( a captura de dados é feita através de uma saída serial – RS 232) e pelo tratamento inicial destes dados.

As especificações relevantes da Central Inercial utilizada nos ensaios são as seguintes:

Taxa máxima de amostragem: em torno de 100 Hz

Bias dos giroscópios: máximo de 0.03 graus/segundo

Resolução dos giroscópios: máximo de 0.025 graus/segundo

Bias dos acelerômetros: máximo de 0.085 metros/s<sup>2</sup>

Resolução dos acelerômetros: máximo de 0.01 m/s<sup>2</sup>

Temperatura de operação: -40 a 71 graus Celsius

Voltagem de alimentação: 10 a 30 VDC

Formato de captura de dados: RS 232

Dimensões físicas do equipamento: 12.7x15.2x10.2

A orientação dos eixos é fácil de ser visualizada na medida em que, se observarmos a DMU da figura 7.1 com o conector voltado para o leitor, o eixo x atravessará a DMU para dentro da folha, o eixo y cruzará a face da DMU da esquerda para a direita e o eixo z também cruzará a face da DMU, porém de cima para baixo.

Como o modelo utilizado foi o VG600AA-202, as acelerações serão fornecidas em relação ao sistema de coordenadas do veículo e a suas orientações positivas coincidirão com as orientações dos eixos ortogonais. Da mesma forma, as velocidades angulares podem ser visualizadas pela regra da mão direita e terão as suas orientações positivas coincidentes com as dos eixos ortogonais da Central.

O modelo VG600AA possui três modos de obtenção de medidas dos sensores, porém, nem todos esses modos nos fornecem todos os dados gerados pelos acelerômetros e giroscópios, sendo o “Angle Mode” o modo de aquisição mais interessante para nossas aplicações, conforme iremos demonstrar na tabela seguinte:

	<i>Voltage mode</i>	<i>Scaled Sensor Mode</i>	<i>Angle Mode</i>
<i>Acelerômetro-x</i>	X	X	X
<i>Acelerômetro-y</i>	X	X	X
<i>Acelerômetro-z</i>	X	X	X
<i>Ângulo de roll</i>			X
<i>Ângulo de pitch</i>			X
<i>Rate do roll</i>		X	X
<i>Rate do pitch</i>		X	X
<i>Rate do yaw</i>		X	X

TABELA IV - Modos de Aquisição de medidas da DMU

Vemos na tabela que apenas no *Angle Mode* temos a informação direta dos ângulos de pitch e roll fornecida pela DMU. Isso é importante, na medida em que esta Unidade pode funcionar como um giroscópio vertical, isto é, os ângulos de roll e pitch podem ser monitorados, fornecendo a vertical local através da função “navigation” do Giroview, ou seja, a central pode ser afixada no veículo de forma mais conveniente (compensando roll e pitch). Além disso, todas as *rates* dos ângulos de roll, pitch e yaw são fornecidas a cada amostragem, o que faz com que possamos propagar o parâmetro do quatêrion no tempo.

Além disso, a DMU possui um sensor de temperatura a bordo de forma a monitorar a temperatura interna da Unidade. Para uma boa precisão, a temperatura interna deverá ser, no máximo, 15° acima da temperatura ambiente. O que faz com que tenhamos que parar o ensaio caso a DMU esteja muito tempo ligada, pois as distorções nas medidas serão muito grandes.

Esta DMU foi embarcada em um automóvel, bem como receptores e antenas do GPS e rádio (DGPS). Com o auxílio de dois ‘note books’ para aquisição e armazenagem dos dados fornecidos pela central inercial e pelo GPS,

conforme vemos na figura seguinte, obtivemos as posições instantâneas do veículo.



Figura 7.2 Ensaio realizado na USP

Um algoritmo de fusão sensorial de Kalman foi implementado com uma frequência de atualização de 1 Hz, de forma a aproximarmos a trajetória plotada nos ensaios da trajetória real percorrida pelo veículo. Vemos, respectivamente nas figuras 7.3 e 7.4, as trajetórias e velocidades que o veículo teve no nosso primeiro ensaio:

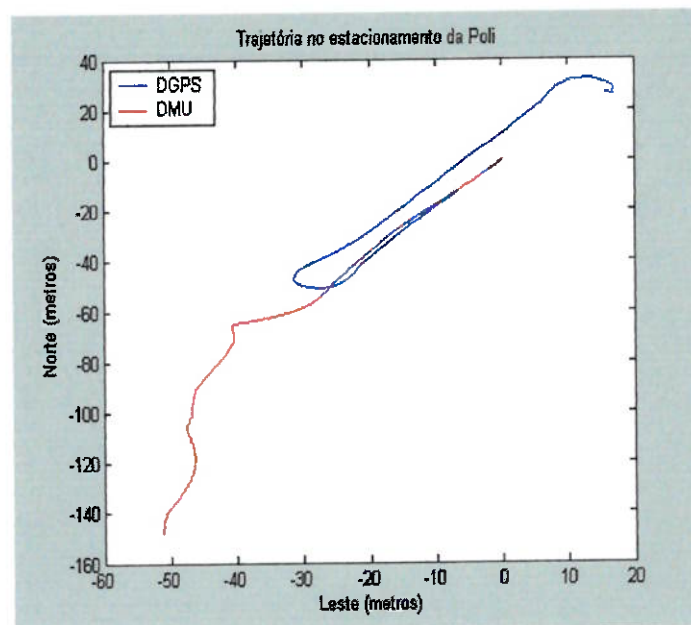


Figura 7.3 Trajetória do veículo no 1º ensaio



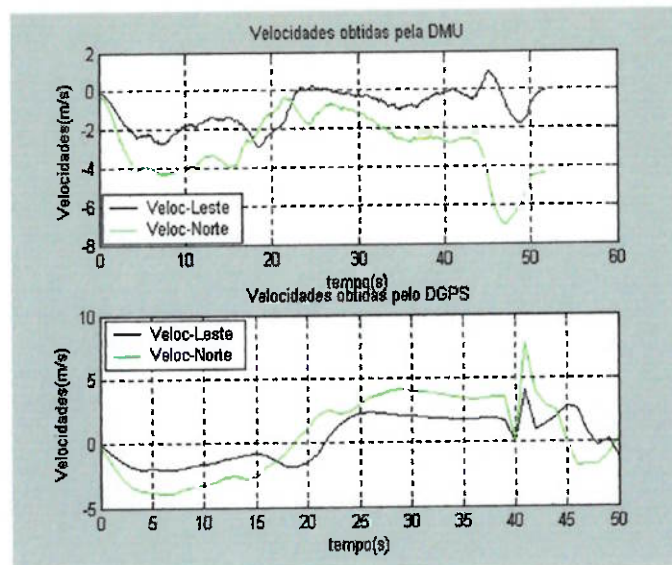


Figura 7.4 Velocidades do veículo no 1º ensaio

Notamos na figura 7.3 que a trajetória fornecida pelo DGPS coincide com a trajetória realizada no estacionamento da Poli e que os dados fornecidos pela DMU degeneram rapidamente, pois conforme já demonstramos, os “bias” dos giroscópios são integrados três vezes no tempo (capítulo 3). Na figura 7.5 temos a noção dessa divergência, na medida em que o desvio alcança 765,4961 metros em 50 segundos.

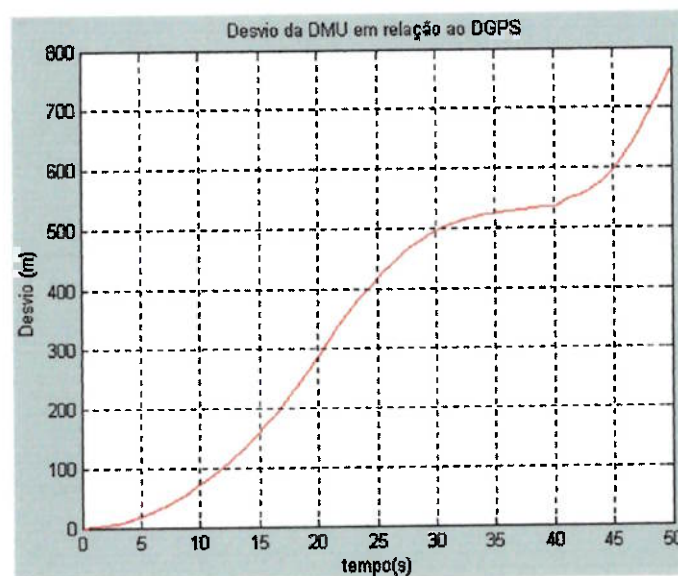


Figura 7.5 Degeneração da DMU



Como forma de corrigirmos essa discrepância e pelo fato de podermos linearizar o modelo de estados da nossa Central Inercial (DMU), utilizaremos o Filtro de Kalman para combinarmos os dados dos dois sensores (DMU e GPS) a uma frequência de 1 Hz (Frequência do GPS) de atualização. A figura seguinte compara a trajetória do GPS com a obtida com o Filtro.

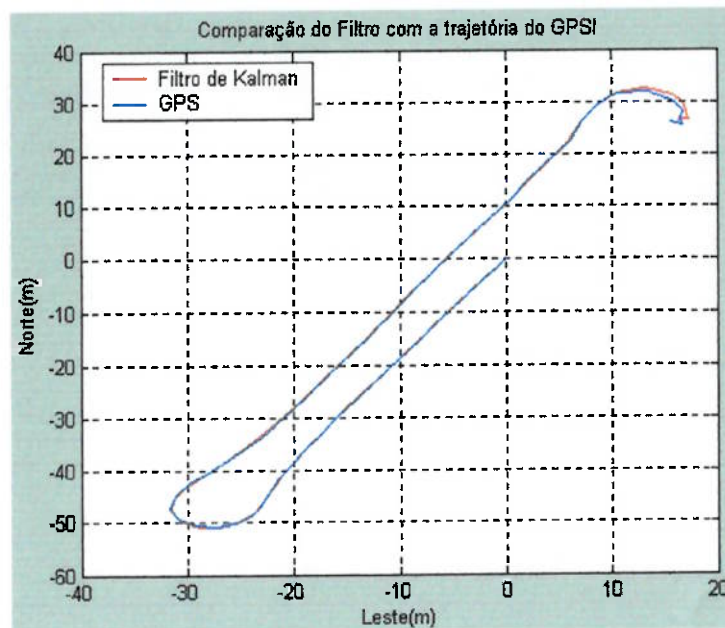


Figura 7.6 Trajetória com o Filtro de Kalman

A trajetória da figura anterior confere com o percurso realizado pelo veículo dentro do estacionamento da Escola Politécnica. É importante observarmos que, sem a utilização de uma fusão sensorial, obtivemos erros iguais a 682.6 m no eixo Norte e 152.5 m no eixo Leste em 50 segundos, ao passo que, quando utilizamos o Filtro de Kalman, temos erros iguais a -0.4698m no eixo Norte e -0.6052m no eixo Leste.

A figura seguinte demonstra a propagação do desvio entre as trajetórias do GPS e a trajetória com fusão sensorial, utilizando o filtro de Kalman. Observe-se que houve uma relevante melhora em relação ao desvio da IMU, mesmo com as oscilações em torno do eixo vertical.

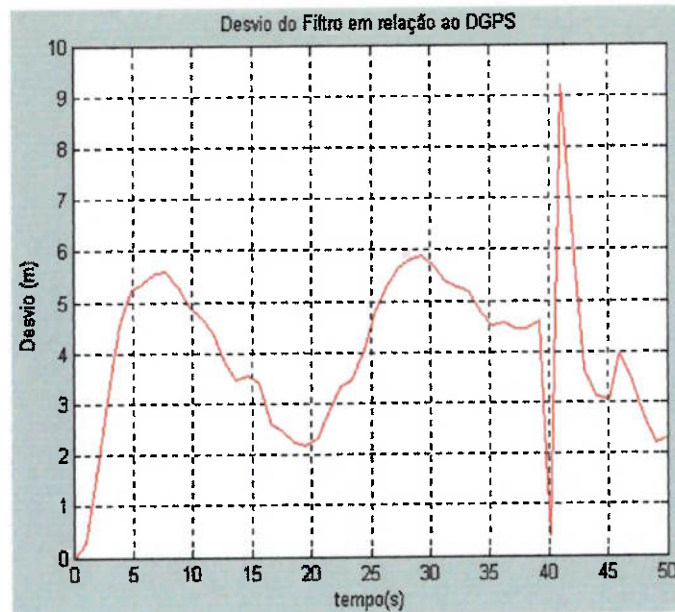


Figura 7.7 Desvio do Filtro de Kalman

A seguir temos as trajetórias e velocidades calculadas no nosso segundo ensaio em uma rotatória dentro da Cidade Universitária (USP) pela Central inercial e pelo GPS, onde temos uma comparação entre os sensores.

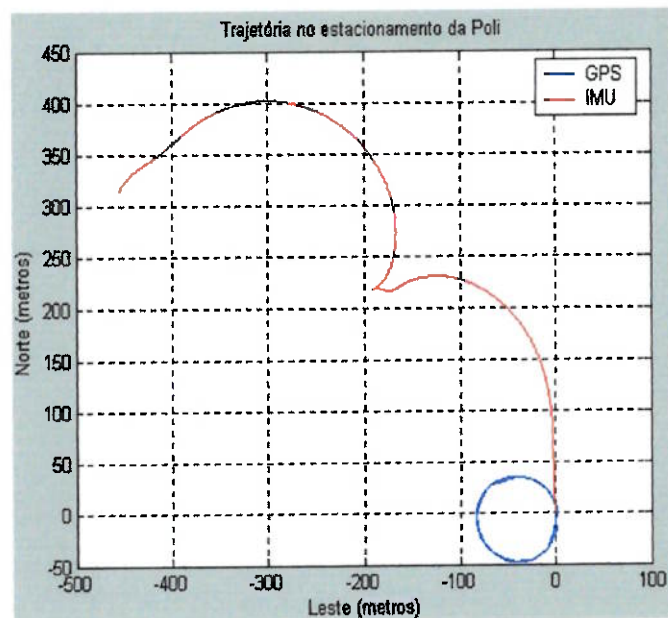


Figura 7.8 Trajetória do veículo no 2º ensaio

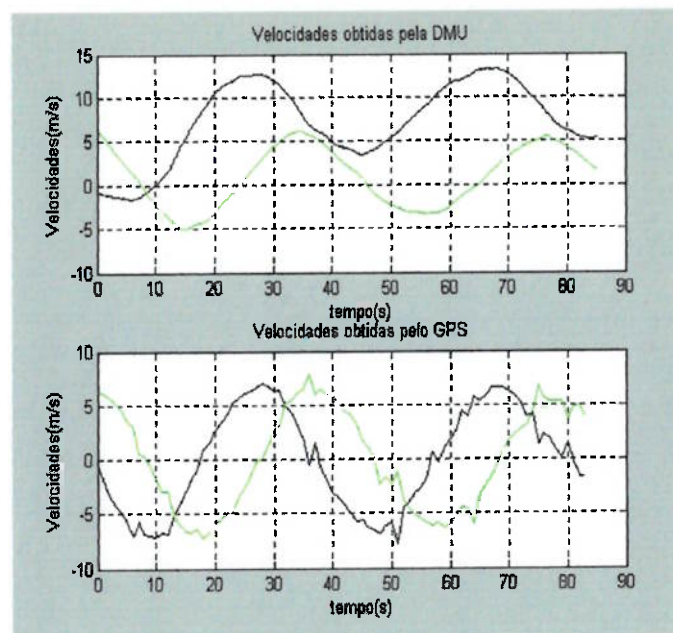


Figura 7.9 Velocidades do veículo no 2º ensaio

As velocidades senoidais nas direções Norte e Leste coincidem com um movimento circular, apesar de as velocidades obtidas pela DMU degenerarem muito rapidamente.

Na figura seguinte temos o desvio da Central em relação ao GPS.

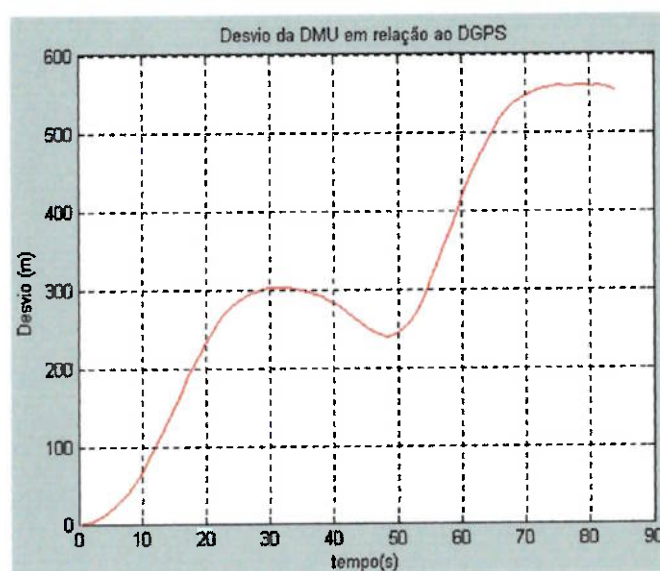


Figura 7.10 Degeneração da DMU

Da mesma forma que fizemos anteriormente, utilizaremos o filtro de Kalman para combinar os dados dos dois sensores e minimizarmos as discrepâncias encontradas com uma taxa de atualização de 1Hz, conforme vemos na figura seguinte:

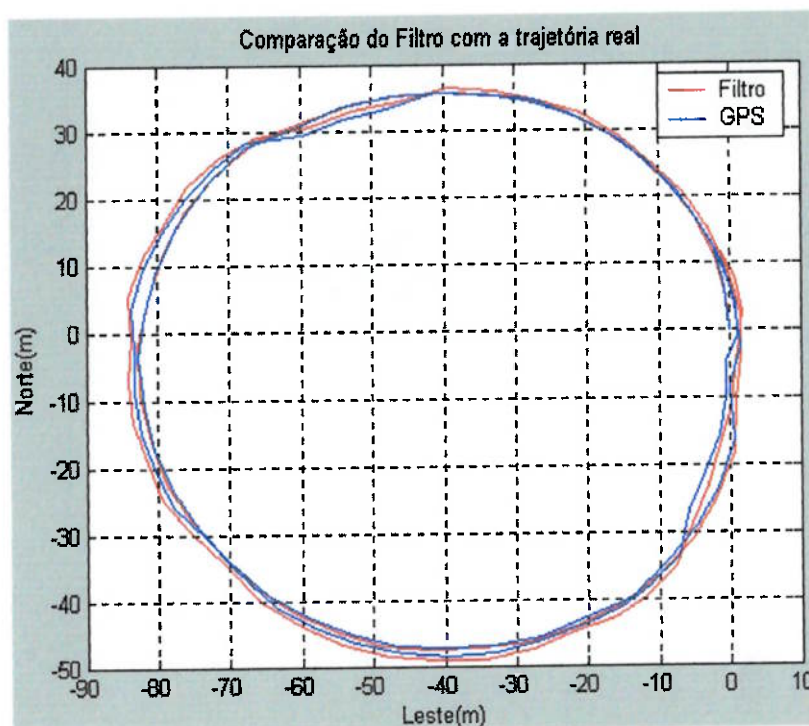


Figura 7.11 Trajetória com o Filtro de Kalman

A trajetória da figura anterior confere com o percurso realizado pelo veículo dentro da Cidade Universitária (USP). Da mesma forma que no primeiro ensaio, é importante observarmos neste segundo que, sem a utilização de uma fusão sensorial, obtivemos erros iguais a -300.4621m na direção do eixo Norte e 452.8657m na direção do eixo Leste, ao passo que, quando utilizamos o Filtro de Kalman com uma frequência de atualização igual a 1Hz (Frequência do GPS), temos erros iguais a 0.75m na direção do eixo Norte e -1.0178 m na direção do eixo Leste.

Na figura seguinte temos a propagação do desvio do Filtro de Kalman em relação ao GPS.

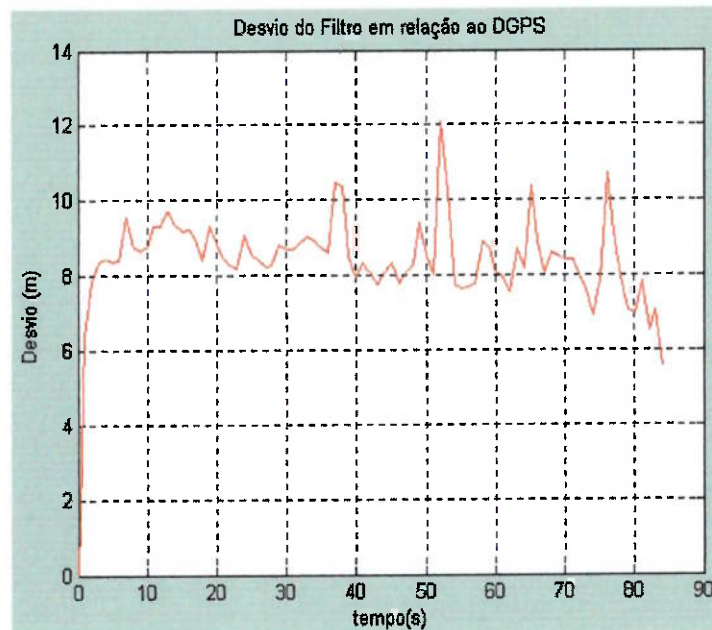


Figura 7.12 Desvio do Filtro de Kalman

Para efeito de navegações a longas distâncias, a DMU utilizada em nossos ensaios não satisfaz aos requisitos necessários, na medida em que degeneram muito rapidamente os dados de saída, principalmente os dados fornecidos pelos sensores girométricos, pois, conforme pudemos comprovar pelos dois ensaios automotivos realizados, no segundo, em que executamos uma trajetória totalmente circular e, conseqüentemente, onde as rates angulares eram maiores, a trajetória divergiu muito mais rápido em relação à nossa referência (GPS). Isso é previsível, pois, conforme no capítulo 3, os parâmetros de desalinhamento ( $\alpha$ ) são multiplicados pelas velocidades angulares para serem somados ao modelo de erros dos giroscópios, sendo esses erros triplamente integrados no tempo.

## 7.2 Fusão sensorial bússola/IMU

Verificamos o desempenho do Filtro de Kalman não só em uma fusão IMU/GPS, mas também na fusão entre uma bússola eletrônica e a mesma IMU do ensaio anterior.



A bússola utilizada nos ensaios é o modelo TCM2-50, e possui as seguintes especificações mais relevantes:

Resolução (yaw):  $0.1^\circ$

Repetibilidade (yaw):  $\pm 0.3^\circ$

Temperatura de operação:  $-20^\circ\text{C}$  a  $70^\circ\text{C}$

Frequência de aquisição de dados: 1Hz a 30Hz

Alimentação: 5VDC

Dimensões físicas: 2.5"x2.00"x1.25"

O modelo é capaz de fornecer os ângulos de roll, pitch e yaw, tendo como fontes de erros não só os campos magnéticos gerados por possíveis objetos metálicos próximos à bússola, mas também o seu inclinômetro, que, por ser composto por um fluido eletrolítico, é vulnerável às acelerações impostas, que distorcem a leitura dos ângulos de roll e pitch do aparelho.

Através de um hiper-terminal de um micro e do software Gyroview já citado anteriormente instalado em um note book, obtivemos as leituras dos ângulos e acelerações do conjunto DMU/bússola, que foi submetido a movimentos rotatórios com 1 m de raio, cujo arranjo é demonstrado na figura seguinte.



Figura 7.13 Arranjo do ensaio com a bússola

Com a bússola afixada, alinhada e isolada magneticamente da DMU, o conjunto, com a ajuda de um contra-peso, realizou vários movimentos circulares com um raio de aproximadamente 1m, onde, em pouco mais de 8 segundos de ensaio, pudemos captar os dados do ensaio.

Utilizando-se como medidas de referência os ângulos de yaw fornecidos pela bússola com seu sistema de coordenadas devidamente transformado para o sistema de coordenadas da DMU (pois o sistema é invertido em relação ao da DMU), o modelo de estados da DMU e o modelo de medições para aplicação do Filtro de Kalman (com frequência de atualização de 30 Hz) serão os seguintes:

$$\begin{bmatrix} rollk+1 \\ pitchk+1 \\ yawk+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rollk \\ pitchk \\ yawk \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Wx \\ Wy \\ Wz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ yawref \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ex \\ ey \\ ez \end{bmatrix}$$

E a comparação entre trajetórias é feita a seguir:

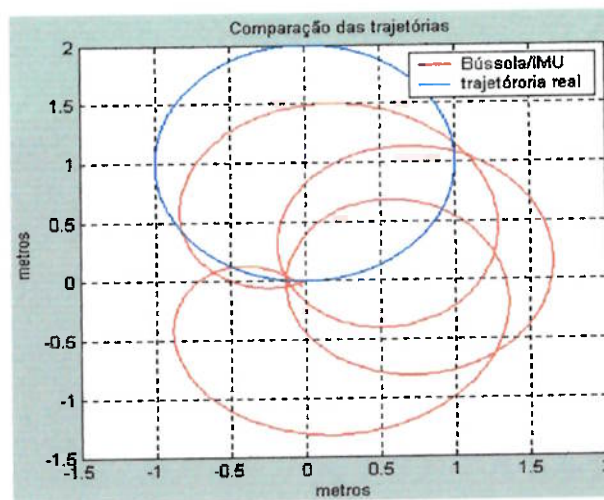


Figura 7.14 Comparação entre as trajetórias

Vemos em azul a trajetória circular real a que o conjunto foi submetido e em vermelho a trajetória obtida com o Filtro de Kalman, que apesar de não ser coincidente, representa uma relevante melhora na estimação quando comparada com a trajetória obtida apenas pela DMU, como veremos na comparação feita na figura seguinte.

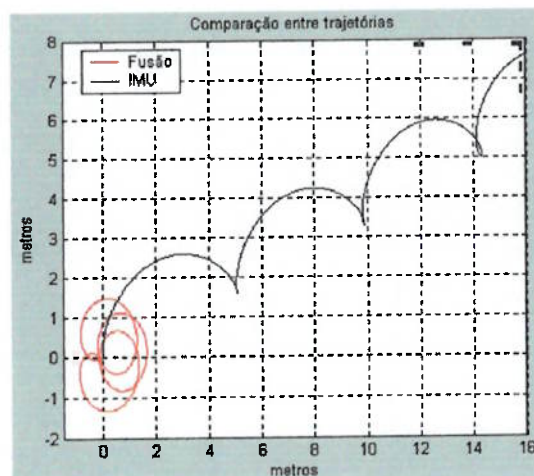


Figura 7.15 Comparação entre as trajetórias bússola/DMU

Para ficar mais clara a influência do Filtro de Kalman na estimativa da trajetória do conjunto DMU/bússola, as figuras seguintes nos mostram os desvios em relação à trajetória real do sistema com fusão sensorial e sem fusão com a bússola eletrônica.

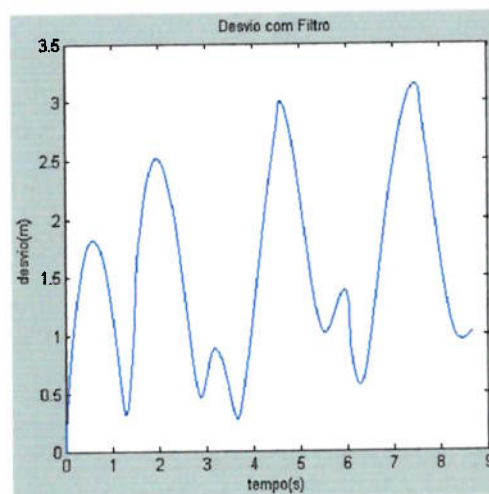
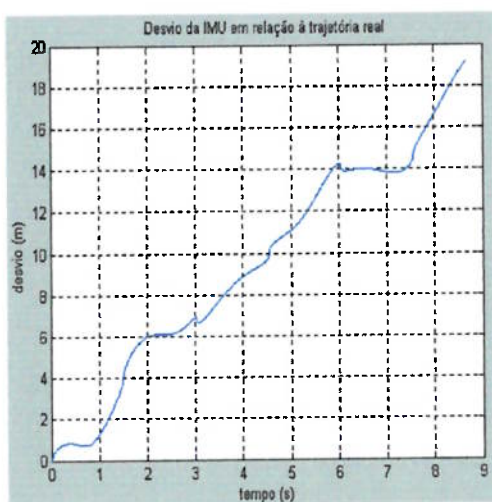


Figura7.16 Desvio sem fusão sensorial      Figura7.17 Desvio com fusão sensorial



Comparando-se a trajetória estimada apenas pela Central Inercial, obtivemos erros da ordem de 20 metros em alguns poucos segundos de teste, ao passo que, com a aplicação do Filtro de Kalman ao conjunto IMU/bússola numa frequência de atualização de 30Hz, obtivemos erros da ordem de 2.5m com o mesmo tempo de teste, comprovando a eficiência e versatilidade do método estimativo empregado.

## 8.0 CONCLUSÃO

No primeiro ensaio, sem a utilização de uma fusão sensorial, obtivemos erros iguais a 682.6 m no eixo Norte e 152.5 m no eixo Leste em 50 segundos, ao passo que, quando utilizamos o Filtro de Kalman, obtivemos erros iguais a -0.4698m no eixo Norte e -0.6052m no eixo Leste, ratificando a conveniência da utilização do Filtro de Kalman. No segundo ensaio, da mesma forma que no primeiro, sem a utilização da fusão, obtivemos erros iguais a -300.4621m na direção do eixo Norte e 452.8657m na direção do eixo Leste, ao passo que, quando utilizamos o Filtro de Kalman com uma frequência de atualização igual a 1Hz (Frequência do GPS), temos erros iguais a 0.75m na direção do eixo Norte e -1.0178 m na direção do eixo Leste, o que torna inegável a eficiência do método estimativo, mesmo com a utilização de uma Central Inercial de baixo custo.

Na simulação realizada com o pig inercial em uma trajetória gerada no MATLAB, verificamos o desempenho de um DTG (Giroscópio Sintonizado Dinamicamente desenvolvido no Centro Tecnológico da Marinha em São Paulo). Sem nenhuma fusão sensorial, este sensor nos proporcionou um erro da ordem 12Km no eixo x e 10.5Km no eixo y no transcorrer do percurso. Já com a aplicação do Filtro de Kalman, tivemos erros na ordem de 3.6389 m no eixo x e -0.8324 m no eixo y, o que aponta uma relevante melhora na estimação da posição, levando-se em conta o tamanho do percurso (~12.3Km) percorrido pelo pig e o tempo de duração da simulação (~3 horas).

A estimação de posição através do Filtro de Kalman se mostrou eficaz quando determinamos a posição de um automóvel no qual estava embarcada uma Central Inercial e quando simulamos trajetórias de embarcações ou pig, utilizando derivas do DTG. Para Centrais Inerciais de baixo custo (o que é o caso da Central utilizada nos ensaios), não é possível estimar a posição de um veículo sem medidas de referência, já que as medidas de aceleração e rotação da Central têm um ruído relativamente alto associado a elas.

Deve-se considerar, ainda, que a adequação do modelo é de fundamental importância para o correto funcionamento do Filtro. No caso da Navegação Inercial, temos que realizar uma série de correções e transformações de coordenadas antes de estimarmos a posição do veículo. Uma modelagem adequada do problema no espaço de estados pode levar ao sucesso total da aplicação do Filtro.

Na simulação do pig inercial (que representa uma aplicação extremamente útil para a indústria petrolífera), a combinação entre uma Central com o DTG da Marinha do Brasil e as velocidades de referência (que podem ser obtidas através de odômetros) através do Filtro de Kalman funcionou bem e se mostrou totalmente adequada, em virtude da versatilidade deste recurso.

## APÊNDICE A - Software de Alinhamento

```
h = 0; %altitude
L = 0; %latitude
R = 6378137; %raio médio da Terra
f = 0.0818191908426; %maior excentricidade do elipsóide
W = 7.292115*10^(-5); %taxa de rotação da Terra
K1=0.8; %fator de escala para entrada positiva nos acelerômetros
K2=1.1; %fator de escala para entrada negativa nos acelerômetros
K3=1.5; %fator de escala para entrada positiva nos giros
K4=2.6; %fator de escala para entrada negativa nos giros
K5=1.3;%fator de escala para entrada positiva no acelerômetro-z
K6=1.8;%fator de escala para entrada negativa no acelerômetro-z

for a=1:6

I1(a)=randn(1); %entrada do acelerômetro-x no alinhamento
I2(a)=randn(1); %entrada do acelerômetro-y no alinhamento
I3(a)=randn(1); %entrada do acelerômetro-z no alinhamento

I4(a)=randn(1); %entrada do giro-x no alinhamento
I5(a)=randn(1); %entrada do giro-y no alinhamento
I6(a)=randn(1); %entrada do giro-z no alinhamento

end

I1=(I1(1)+I1(2)+I1(3)+I1(4)+I1(5)+I1(6))/6;
I2=(I2(1)+I2(2)+I2(3)+I2(4)+I2(5)+I2(6))/6;
I3=(I3(1)+I3(2)+I3(3)+I3(4)+I3(5)+I3(6))/6;
I4=(I4(1)+I4(2)+I4(3)+I4(4)+I4(5)+I4(6))/6;
I5=(I5(1)+I5(2)+I5(3)+I5(4)+I5(5)+I5(6))/6;
I6=(I6(1)+I6(2)+I6(3)+I6(4)+I6(5)+I6(6))/6; %média das observações

% compensação da assimetria do fator de escala
if I1>0
z1=1;
z2=0;
```

```

else
z1=0;
z2=1;
end
K = K1*z1 + K2*z2; %fator de escala
gx=K*I1; %dado fornecido pelo acelerômetro-x

```

```

if I2>0
z1=1;
z2=0;
else
z1=0;
z2=1;
end
K = K1*z1 + K2*z2; %fator de escala
gy=K*I2; %dado fornecido pelo acelerômetro-y

```

```

if I3>0
z1=1;
z2=0;
else
z1=0;
z2=1;
end
K = K5*z1 + K6*z2; %fator de escala
gz=K*I3; %dado fornecido pelo acelerômetro-z

```

```

if I4>0
z1=1;
z2=0;
else
z1=0;
z2=1;
end
K = K3*z1 + K4*z2; %fator de escala
wx=K*I4; %dado fornecido pelo giro-x

```

```

if I5>0

```

```

z1=1;
z2=0;
else
z1=0;
z2=1;
end
K = K3*z1 + K4*z2; %fator de escala
wy=K*I5; %dado fornecido pelo giro-y

if I6>0
z1=1;
z2=0;
else
z1=0;
z2=1;
end
K = K3*z1 + K4*z2; %fator de escala
wz=K*I6; %dado fornecido pelo giro-z

RN = (R*(1-f^2))/(1-(f^2)*(sin(L)^2))^(3/2); %raio meridiano de curvatura
RE = R/(1-(f^2)*(sin(L)^2))^(1/2); %raio transversal de curvatura
R0 = (RE*RN)^(1/2); %raio de curvatura médio
g0 = 9.780318*(1 + 5.3024*(10^-3)*(sin(L)^2) - 5.9*(10^-6)*(sin(2*L)^2)); %gravidade ao
nível do mar
gh = g0/((1+h/R0)^2); %gravidade na altitude "h"

By = 5; %desvio do acelerômetro-y
Bx = 5; %desvio do acelerômetro-x
Dy = 0.5*10^(-5); %desvio do giro-y

da = By/gh; %desalinhamento em torno do eixo North(N)
db = -Bx/gh; %desalinhamento em torno do eixo East(E)
dg = Dy/(W*cos(L)); %desalinhamento em torno da vertical local(D)

Cbna(1,1)=(wx/W*cos(L)) - (gx*tan(L)/gh); %matriz estimada dos quaternions
Cbna(1,2)=(wy/W*cos(L)) - (gy*tan(L)/gh);

```

```

Cbna(1,3)= (wz/W*cos(L)) - (gz*tan(L)/gh);
Cbna(3,1)= -gx/gh; %matriz estimada dos quaternions
Cbna(3,2)= -gy/gh;
Cbna(3,3)= -gz/gh;
Cbna(2,1)= -Cbna(1,2)*Cbna(3,3) + Cbna(1,3)*Cbna(3,2);
Cbna(2,2)= Cbna(1,1)*Cbna(3,3) - Cbna(3,1)*Cbna(1,3);
Cbna(2,3)= -Cbna(1,1)*Cbna(3,2) + Cbna(3,1)*Cbna(1,2);

Y = [1,-dg,db;dg,1,-da;-db,da,1];
I = [1,0,0;0,1,0;0,0,1]; %matriz identidade
B = I - Y; %matriz do desalinhamento;
Cbn = Cbna*B;
Cnb = inv(Cbn); %verdadeira matriz dos quaternions

```

## APÊNDICE B - Software de Navegação

```
g0 = 9.77811; %gravidade ao nível de São Paulo
R = 6378137; %raio médio da Terra(m)

%condição inicial
dNr(1)=0;
dEr(1)=0;
dDr(1)=0;
N(1)=0;
E(1)=0;
D(1)=0;
dN(1)=0;
dE(1)=0;
dD(1)=0;

%índice da DMU
j=1;

%transformação graus-rad
lat=(lat*pi)/180;
long=(long*pi)/180;

%variáveis de referência do DGPS
for i=1:size(lat)-1
dNr(i+1)=dNr(i)+(lat(i+1)-lat(i))*R; %Hemisfério Sul
dEr(i+1)=dEr(i)+(long(i+1)-long(i))*R*cos(lat(i));
dDr(i+1)=alt(i+1)-alt(i);
end

%calibragem do tempo
t=t-t(1);

%cálculo das velocidades de referência
for i=1:size(lat)-1
```



```

vNr(i)=dNr(i+1)-dNr(i);
vEr(i)=(dEr(i+1)-dEr(i));
vDr(i)=dDr(i+1)-dDr(i);
end

%transformação graus-rad
w=(w*pi)/180;

%transformação graus-rad
roll=(roll*pi)/180;
pitch=(pitch*pi)/180;

%cálculo do yaw
yaw(1)=0;
dyaw(1)=(w(1,2)*sin(roll(1))+w(1,3)*cos(roll(1)))*sec(pitch(1));
tempo(1)=0;
for i=2:size(t)
tempo(i)=t(i);
dyaw(i)=(w(i,2)*sin(roll(i))+w(i,3)*cos(roll(i)))*sec(pitch(i));
yaw(i)=trapz(tempo,dyaw);
end

ddEr=dEr(2)-dEr(1);
ddNr=dNr(2)-dNr(1);
yaw0=atan2(ddEr,ddNr); %cálculo do yaw inicial

if ddEr<0
yaw0=2*pi+yaw0; %cálculo do yaw inicial
end

yaw=yaw+yaw0;

for i=1:size(t)

%parâmetros iniciais do quatérnion
a(1)=cos(roll(1)/2)*cos(pitch(1)/2)*cos(yaw(1)/2)+
sin(roll(1)/2)*sin(pitch(1)/2)*sin(yaw(1)/2);

```

```

b(1) = sin(roll(1)/2)*cos(pitch(1)/2)*cos(yaw(1)/2) -
cos(roll(1)/2)*sin(pitch(1)/2)*sin(yaw(1)/2);
c(1) = cos(roll(1)/2)*sin(pitch(1)/2)*cos(yaw(1)/2) +
sin(roll(1)/2)*cos(pitch(1)/2)*sin(yaw(1)/2);
d(1) = cos(roll(1)/2)*cos(pitch(1)/2)*sin(yaw(1)/2) +
sin(roll(1)/2)*sin(pitch(1)/2)*cos(yaw(1)/2);

```

%propagação do quatêrnion

```

time2(1)=t(1);
da(1)=-0.5*(b(1)*w(1,1)+c(1)*w(1,2)+d(1)*w(1,3));
db(1)=0.5*(a(1)*w(1,1)-d(1)*w(1,2)+c(1)*w(1,3));
dc(1)=0.5*(d(1)*w(1,1)+a(1)*w(1,2)-b(1)*w(1,3));
dd(1)=-0.5*(c(1)*w(1,1)-b(1)*w(1,2)-a(1)*w(1,3));
for i=2:size(t)
da(i)=-0.5*(b(i-1)*w(i,1)+c(i-1)*w(i,2)+d(i-1)*w(i,3));
db(i)=0.5*(a(i-1)*w(i,1)-d(i-1)*w(i,2)+c(i-1)*w(i,3));
dc(i)=0.5*(d(i-1)*w(i,1)+a(i-1)*w(i,2)-b(i-1)*w(i,3));
dd(i)=-0.5*(c(i-1)*w(i,1)-b(i-1)*w(i,2)-a(i-1)*w(i,3));
time2(i)=t(i);
a(i)=trapz(time2,da);
b(i)=trapz(time2,db);
c(i)=trapz(time2,dc);
d(i)=trapz(time2,dd);
end

```

% Matriz de mudança de base

```

Cnb = [ ((a(i)^2)+(b(i)^2)-(c(i)^2)-(d(i)^2)) 2*(b(i)*c(i)-a(i)*d(i)) 2*(b(i)*d(i)+a(i)*c(i))
2*(b(i)*c(i)+a(i)*d(i)) ((a(i)^2)-(b(i)^2)+(c(i)^2)-(d(i)^2)) 2*(c(i)*d(i)-a(i)*b(i))
2*(b(i)*d(i)-a(i)*c(i)) 2*(c(i)*d(i)+a(i)*b(i)) ((a(i)^2)-(b(i)^2)-(c(i)^2)+(d(i)^2)) ];

```

```

fb1=g0*(fb(i,:));
fn=Cnb*fb1; %transformação de coordenadas
fN=fn(1,1); %força específica no eixo-N
fE=fn(2,1); %força específica no eixo-E
fD=fn(3,1); %força específica no eixo-D

```

%cálculo das acelerações

aN(i) = fN;

aE(i) = fE;

aD(i) = fD+g0;

end

%cálculo das velocidades

vN(1)=0;

vE(1)=0;

vD(1)=0;

tempo1(1)=0;

an(1)=aN(1);

ae(1)=aE(1);

ad(1)=aD(1);

for i=2:size(t)

tempo1(i)=t(i);

an(i)=aN(i);

vN(i)=trapz(tempo1,an);

ae(i)=aE(i);

vE(i)=trapz(tempo1,ae);

ad(i)=aD(i);

vD(i)=trapz(tempo1,ad);

end

vN=vNr(1)+vN;

vE=vEr(1)+vE;

vD=vDr(1)+vD;

%cálculo dos deslocamentos

tempo2(1)=0;

vn(1)=vN(1);

ve(1)=vE(1);

vd(1)=vD(1);

for i=2:size(t)

tempo2(i)=t(i);

vn(i)=vN(i);

dN(i)=trapz(tempo2,vn);

```

ve(i)=vE(i);
dE(i)=trapz(tempo2,ve);
vd(i)=vD(i);
dD(i)=trapz(tempo2,vd);
end

time(1)=0; %matriz tempo
for i=1:size(lat)-2
time(i+1)=time(i)+1;
end

%construção do algoritmo de Kalman
%variável de referência
y(:,:)=[dNr;dEr;dDr];
%condição inicial
x(:,:)=0;vNr(1);vEr(1);vDr(1)];
%medidas da aceleração
u(:,:)=[aN;aE;aD];
j=1; %índice da DMU

%matrizes que definem o modelo de medição
H=[1 0 0 0 0 0
    0 1 0 0 0 0
    0 0 1 0 0 0];

G=eye(3);

%covariança inicial
P=eye(6);

%propagação do filtro
C=eye(6);

for i=1:size(lat)
T=t(i+1)-t(i);

%matrizes que definem a dinâmica do processo
A=[1 0 0 T 0 0

```

```

0 1 0 0 T 0
0 0 1 0 0 T
0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 1];

B=[0.5*(T^2) 0 0
    0 0.5*(T^2) 0
    0 0 0.5*(T^2)
    T 0 0
    0 T 0
    0 0 T];

%propagação da covariância
K=(A*P*H')*(inv(H*P*H'+G*G'));
P=(A-K*H)*P*(A-K*H)'+C*C'+K*G*G'*K';
x(:,i+1)=A*x(:,i)+B*u(:,j)+K*((y(:,i))-H*x(:,i));
j=50*i;
N(i+1)=x(1,i+1);
E(i+1)=x(2,i+1);
D(i+1)=x(3,i+1);
VNr(i+1)=x(4,i+1);
VEf(i+1)=x(5,i+1);
VDf(i+1)=x(6,i+1);

end
%término do filtro de Kalman

figure(1)
subplot(2,1,1); plot(t,vE,'k',t,vN,'g') %plotagem das velocidades(DMU)
xlabel('tempo(s)')
ylabel('Velocidades(m/s)')
title ('Velocidades obtidas pela DMU')
grid
subplot(2,1,2); plot(time,vEr,'k',time,vNr,'g') %plotagem das velocidades(DGPS)
xlabel('tempo(s)')
ylabel('Velocidades(m/s)')
title ('Velocidades obtidas pelo DGPS')

```

```
grid
```

```
figure(2)
```

```
plot(dEr,dNr,'b',dE,dN,'r')%plotagem da trajetória do veículo
```

```
xlabel('Leste (metros)')
```

```
ylabel('Norte (metros)')
```

```
title ('Trajetória no estacionamento da Poli')
```

```
grid
```

```
figure(3)
```

```
plot(E,N)
```

```
xlabel('Leste(m)')
```

```
ylabel('Norte(m)')
```

```
title ('Trajetória com o filtro de Kalman')
```

```
grid
```

## **LISTA DE REFERÊNCIAS**

Lawrence, A.. **Modern Inertial Navigation: Navigation, Guidance, and Control**. Second Edition. Springer. 1998.

Brown, R. Grover, Hwang, Patrick Y. C.. **Introduction to Random Signal and Applied Kalman Filtering**. Third Edition. John Wiley & Sons. 1997.

Titterton, D. H., Weston, J. L.. **Strapdown Inertial Navigation Technology**. IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionic Series 5. 1997.

Almendinger, E. Eugene. **Submersible Vehicle Support Systems**. Society of Naval Architects and Marine Engineers, 1990.

Grewal, Mohinder S.. **Kalman filtering : theory and practice**. Prentice-Hall. 1993.

Junqueira, F. de Castro. **Desenvolvimento de um giroscópio sintonizado Dinamicamente DTG**. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 2003.

Merian, J. L., Kraige, L. G.. **Mecânica Dinâmica**. Quarta edição. Livros Técnicos e Científicos Editora S.A.. 1997.

Joos, D. K.. **Identification and determination of Strapdown error-parameters by laboratory testing**. Uberlingen, Germany

Crossbow. **VG70AA User's Manual**. Setembro de 2002 (Document 7430-0074-01).

Campos, V. A. F.; Santana, D. D. S.; Furukawa, C. M.; Maruyama, N. **Trajectory Estimation of a pig using a Strapdown Low Cost Inertial**

**Measurement Unit and Odometry.** In: VI INDSCON: anais, in press.

Realizado em Joinville em Outubro de 2004.